CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN

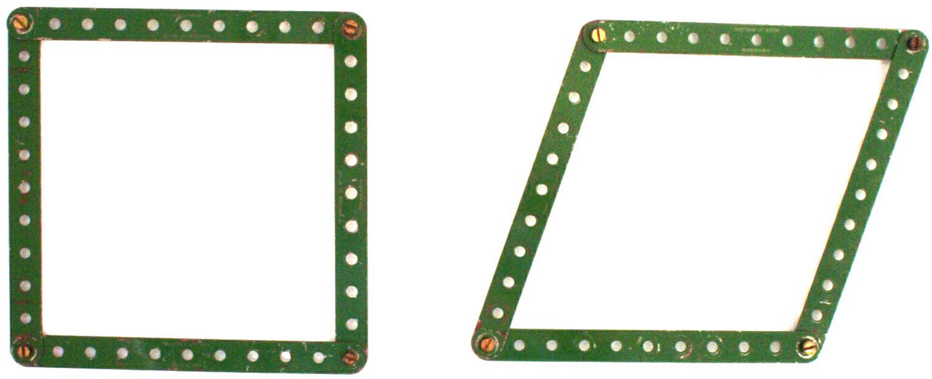
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
E DELLE SCIENZE INTEGRATE

LA COSTRUZIONE DEL SAPERE MATEMATICO PER LA SOCIETÀ

IN UNA SCUOLA IN TRASFORMAZIONE: CONTENUTI, METODI, STRUMENTI

FIGURE GEOMETRICHE E DEFINIZIONI

UN ITINERARIO GUIDATO PER L'INIZIO DELLA SCUOLA SECONDARIA



MARIA BATINI, LUCILLA CANNIZZARO, BRUNA CAVALLARO, CARLA DE SANTIS, VANNA LOMBARDI, MARTA MENGHINI, LINDA PERCARIO

GRUPPO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
COORDINATO DA LUCILLA CANNIZZARO E MARTA MENGHINI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

FIGURE GEOMETRICHE E DEFINIZIONI

UN ITINERARIO GUIDATO PER L'INIZIO DELLA SCUOLA SECONDARIA

Maria Batini, Lucilla Cannizzaro, Bruna Cavallaro, Carla De Santis, Vanna Lombardi, Marta Menghini, Linda Percario

Gruppo di Ricerca in Didattica della Matematica
coordinato da Lucilla Cannizzaro e Marta Menghini
Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"

2004

**LA COSTRUZIONE DEL SAPERE MATEMATICO PER LA SOCIETÀ
IN UNA SCUOLA IN TRASFORMAZIONE:
CONTENUTI, METODI, STRUMENTI**

NB. Sono qui allegate le parti evidenziate in azzurro nell'indice.
L'intero quaderno può essere richiesto al Dipartmento di Matematica di Roma La Sapienza

INDICE

INTRODUZIONE

Il lavoro[1] nasce dalla constatazione che gli alunni che entrano nella scuola secondaria superiore, pur conoscendo le figure geometriche, non hanno familiarità con le proprietà particolari di esse, vale a dire non sempre sanno evidenziare le differenze specifiche da esprimere nelle definizioni. D'altra parte, è compito della scuola superiore orientare gli alunni verso una maggiore consapevolezza e verso la *definizione* delle figure geometriche[2], intesa qui come l'espressione degli elementi minimi con i quali descrivere una figura già di fatto conosciuta. Su questo si basa il concetto di "condizione necessaria e sufficiente" e l'avvio alla dimostrazione[3].

---

1 Lavoro effettuato nell'ambito del progetto CNR " La costruzione del sapere matematico per la società"; e dei programmi di ricerca cofinanziati dal MIUR: "Aspetti lunguistici nella elaborazione dei concetti matematici da parte dei non specialisti" (Prot. 2002013971/005) e "Problemi di insegnamento-apprendimento in matematica: significati, modelli,teorie" (Prot. 2003011072)

2 Relativamente al problema della definizione degli oggetti matematici, si può vedere, sul versante epistemologico:

- G. Peano, *La definizione in matematica*, Periodico di Matematiche, IV , I, 1921, 175-189
- C. Bernardi, "La logica nella didattica: le definizioni", Nuova Secondaria,V, 1 1987, 26-27.

Sul versante didattico:

- F. Furinghetti (a cura di) *Definire, argomentare, dimostrare nel biennio e nel triennio*, Progetto Strategico CNR, Quaderno n. 13, 1992
- J. D. Godino, C. Batanero, *Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici*, Pitagora, Bologna, 1999
- C. Marchini, *Le definizioni e le notazioni: un problema didattico*, Quaderni Dipartimento di Matematica, Università di Lecce, n. 1, 1992
- D. Paola, *Le definizioni: dalla parte degli studenti*, L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, 23 A-B, 6, 562-600

3 Questioni didattiche sulla dimostrazione sono discusse in:

- N. Balacheff, *Imparare la prova*, La Matematica e la sua Didattica, 2, 2001, 116 – 149
- R. Duval, *Struttura del ragionamento deduttivo e apprendimento della dimostrazione*, La Matematica e la sua Didattica, 4, 1996, 370-393
- G. Hanna, *Il valore permanente della dimostrazione*, La Matematica e la sua Didattica, 3, 1997, 236-252
- D. Paola, O. Robutti, La dimostrazione alla prova, in "Matematica e aspetti didattici", Quaderno 45, MPI, 2001, 97-201

E' stato elaborato un itinerario che, con una serie di esercizi, metta via via in evidenza varie proprietà di triangoli e quadrilateri, per arrivare a fissare l'attenzione su quelle proprietà che caratterizzano le varie figure.
Nell'itinerario, guidato principalmente attraverso schede di lavoro individuali, si alternano richieste di costruzioni o manipolazioni geometriche a osservazioni di figure già disegnate.

E' particolarmente importante il modo in cui l'attività è condotta: il lavoro autonomo dell'alunno, l'alternanza delle schede con la discussione in classe, con altri esercizi guidati, ed eventualmente con il laboratorio centrato sull'uso di un software geometrico (quale il Cabri)[4].
Tali indicazioni nascono da un presupposto teorico: la *teoria dei livelli* di van Hiele[5], con la quale il matematico olandese descrive le tappe del pensiero matematico che gli alunni conquistano sulla base di specifiche attività didattiche.

Su questa teoria poggia la scelta di un lento e dettagliato riepilogo delle proprietà dei triangoli e dei quadrilateri, con risposte molto guidate. A questo livello si potrebbe prevedere qualche forma

[4] Sul software geometrico (ed in particolare Cabri) si vedano:
- Commissione UMI per i nuovi programmi: le nuove tecnologie nell'attività di *insegnamento - apprendimento della matematica*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 24B, 5, 2001, 407-418
- M. Barra, *Geometria dello spazio*, in "L'insegnamento della geometria dello spazio" quaderno 19/2, MPI (Direzione Classica)-UMI, 1997, 111-146.
- M. Barra, *Cabri, "il movimento", l'equiscomponibilità e le tassellazioni per dimostrare* varie generalizzazioni del teorema di Pitagora e infinite scomposizioni, Progetto Alice, N. 8, Vol. 3, 2002, 201-250.
- P. Boieri, *Introduzione a Cabri-Géomètre,* L'Insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, n.6, 701-717
- G. Finos, *Parallelogrammi (…e Cabri aiuta),* L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 26A, 1, 2003, 30-47

Segnaliamo inoltre il Bollettino *CabrIRRSAE*, da richiedere a IRRE Emilia Romagna, via U. Bassi 7, 40121 Bologna, o leggibile (e scaricabile) nel sito: http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.htlm.

[5] Per approfondire la conoscenza della teoria di van Hiele è possibile partire dai seguenti riferimenti in lingua italiana:
- H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La Scuola, 1994
- E. Gallo, *Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche*, 18° Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica "Dalla Scuola media alle superiori: continuità nell'insegnamento della matematica", Notiziario U.M.I., Luglio 1997, Supplemento al n. 7, Anno XXIV, 21-34

di rifiuto o di sufficienza da parte dei ragazzi. In realtà l'esperienza ci ha insegnato che questo non si verifica: va, infatti, tenuto presente che all'inizio di un nuovo ciclo, con un insegnante e con compagni nuovi, gli alunni sono meno disinvolti e soprattutto sono contenti di vedere che conoscono bene certi argomenti. In alcuni casi, quando ad esempio si chiede all'alunno di ritagliare una figura al fine di verificarne le proprietà di simmetria, l'insegnante può valutare se accettare che questo passaggio sia solo "mentale".

Vi è un ulteriore intento didattico nella scelta effettuata: se si vuole arrivare ad una certa precisione, e conseguente uniformità, di linguaggio, è auspicabile che i simboli impiegati provengano da una stessa base: bisogna partire dallo stesso materiale a livello inferiore, ed esaminare se si arriva, con uno stesso punto di partenza, a sviluppare gli stessi domini dei simboli superiori.

Le principali figure geometriche sono considerate note a livello *percettivo* (come *simbolo*, nella definizione di van Hiele); non sono date definizioni, anche se l'insegnante si assicurerà che gli alunni possano riconoscere e distinguere le varie figure; solo per triangolo isoscele e equilatero vengono richiamate le proprietà relative ai lati (con riferimento ad un disegno). L'azione didattica si concentra in modo particolare sul passaggio da quello che van Hiele chiama *simbolo* (una figura con il complesso delle sue proprietà) al *segnale significativo* (quella, fra le proprietà, che richiama alla memoria l'intero simbolo), e dal *segnale* alla *definizione* (la proprietà sufficiente a distinguere la figura).

La linea seguita è in accordo con un'affermazione di Hans Freudenthal, secondo cui, "non si può definire un oggetto senza prima conoscerlo".

Riteniamo infatti che lo scopo della corretta definizione, a questo livello scolare, non sia di spiegare cos'è un certo oggetto, ma di spiegare "cos'è una definizione"; essa non può quindi essere impartita prima che l'oggetto, con tutte le sue proprietà, sia conosciuto.

Questa "prudenza" non significa un abbassamento degli obiettivi prefissati, semplicemente si cerca di rimandare il momento di sistemazione linguistica e concettuale da parte dell'insegnante a quando sia possibile una maggiore sintonia tra insegnante e allievo.

L'intero percorso richiede circa 8 ore di lezione. Consigliamo di dedicarvi un paio d'ore a settimana, alternandolo con altri argomenti. Alcune delle schede possono anche essere date per casa.

Nel primo paragrafo viene descritta la teoria dei livelli di van Hiele, segue poi, nel secondo paragrafo, un'ulteriore riflessione storico-didattica sulle definizioni.

Il terzo paragrafo contiene commenti e suggerimenti didattici riferiti alle singole schede di lavoro; in particolare è illustrato l'ausilio offerto dal software Cabri. Tali commenti scaturiscono dalle sperimentazioni del materiale proposto, effettuate negli anni precedenti dalle autrici di questo lavoro e da altri insegnanti della scuola secondaria superiore.

Le schede, predisposte in modo da poter essere direttamente utilizzate nelle classi, sono inserite in fondo al fascicolo.

1. P. M. VAN HIELE E LA TEORIA DEI LIVELLI DI PENSIERO GEOMETRICO

Esponiamo per sommi capi la teoria dei livelli di pensiero geometrico formulata da van Hiele, matematico olandese, collaboratore di H. Freudenthal[5] e docente in una scuola Montessori in Olanda.

Centrale è il concetto di *Struttura*, con valenze cognitive e non solo matematiche. Con dichiarati riferimenti alla Teoria della Gestalt[6], la Struttura ha all'interno della Teoria di van Hiele un valore essenzialmente percettivo; la struttura è contemporaneamente strumento e oggetto di conoscenza. Da un punto di vista didattico, la struttura visuale è quella che si presta ad avviare il lavoro in geometria; la formazione e la trasformazione di strutture guidano allo sviluppo dei simboli.

Gli aspetti fondamentali della Teoria di van Hiele sono tre: i livelli di pensiero, le fasi di apprendimento e l'insight (al quale qui accenniamo solo fugacemente).

I livelli di pensiero

Il tipo di processo coinvolto nel passaggio da una struttura meno differenziata ad una più differenziata viene definito da van Hiele come la transizione ad un più alto livello di pensiero: "… un individuo raggiunge un più alto livello di pensiero, quando un nuovo ordine del pensiero gli consente, rispetto a certe operazioni, di applicare queste stesse operazioni a nuovi oggetti. Non sarà il solo insegnamento a favorire ciò, ma una scelta oculata di esercizi ed esempi certamente determinerà una situazione favorevole."

I livelli di pensiero, per van Hiele, non sono una struttura collocata all'interno degli argomenti di studio, ma costituiscono una possibile classificazione di momenti appartenenti al pensiero. In geometria van Hiele distingue cinque differenti livelli di pensiero; tratta diffusamente dei primi

---

5 Per avere notizie su Hans Freudenthal e sulla sua opera di riflessione didattica, si può consultare la voce *H. Freudenthal* (a cura di M. Barra) dell'*'Enciclopedia Pedagogica, Appendice A-Z,* diretta da Mauro Laeng, Editrice La Scuola, 2002, e il volume postumo: H. Freudenthal, *Ripensando all'educazione matematica*, La Scuola, 1994.

6 Per un inquadramento della teoria psicologica della Gestalt nell'ambito dell'insegnamento – apprendimento della matematica può risultare utile la lettura del 6° capitolo del volume di L. B. Resnick, W.W. Ford, *Psicologia della Matematica e apprendimento scolastico*, SEI, 1991.

quattro e definisce il quinto solo come uno dei livelli più alti ai quali si può aspirare non escludendo, per altro, l'esistenza di altri potenziali livelli.

Il **livello base** (livello visuale, o **primo livello**), è il livello del *simbolo*; in cui il ragazzo condensa tutte le proprietà di una figura geometrica di cui ha avuto esperienza. Le figure sono rappresentative di tutte le loro proprietà, hanno un carattere di immagine, appunto un carattere simbolico. Ricordando a piacere le proprietà il ragazzo sa operare con il simbolo, pur senza essere conscio del complesso delle proprietà. Per esempio, egli riconoscerà un rettangolo dalla sua forma e questo gli apparirà diverso da un quadrato; dopo avergli mostrato un rombo, un quadrato, un parallelogramma e un rettangolo, sarà in grado di riprodurre queste figure senza errori. Grazie al possesso di un certo numero di simboli, il ragazzo sarà in grado di dare una certa organizzazione alla materia da studiare.

Al **secondo livello** (livello descrittivo), le proprietà risulteranno fissate stabilmente se confrontate con proprietà analoghe di altre figure. Quasi per abitudine, i simboli divengono segnali (signals); ad esempio, da tutte le proprietà appartenenti al simbolo rombo (lati uguali, lati paralleli a due a due, angoli opposti uguali, diagonali perpendicolari) ne emerge una (lati uguali) che diviene il *segnale significativo* della figura. Da questo segnale il ragazzo è in grado di anticipare altre proprietà.
Le immagini perdono di importanza rispetto alle "relazioni", i simboli e i segnali del livello 1 diventano argomento di studio, ma le proprietà non sono ancora ordinate, e i ragazzi non sono ancora in grado di differenziare le proprietà in termini di definizioni e proposizioni. In questa fase un quadrato non è riconosciuto ancora come un particolare rettangolo.

Il **terzo livello** (livello della geometria Euclidea): il ragazzo comincia ad osservare le varie relazioni dal punto di vista logico. Questo richiede contemporaneamente che egli affini il linguaggio e impari la terminologia tecnica. L'implicazione, e quindi la definizione, acquistano significato all'interno delle relazioni geometriche. Ma in tale livello il significato intrinseco della deduzione non è ancora chiaro. Cominciano ad emergere nuovi principi organizzatori: questa è, secondo Van Hiele, l'essenza della geometria.

Prima di proseguire esaminiamo un esempio:
Teorema. Le bisettrici degli angoli di base di un triangolo isoscele formano, con la base, un nuovo triangolo isoscele.
Per essere in grado di dimostrare questo teorema si deve sapere che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali; perciò anche nel nuovo triangolo gli angoli alla base sono uguali. Ma un triangolo che ha due angoli uguali è isoscele.
Se i ragazzi non sono nelle condizioni di produrre tale ragionamento può essere che non abbiano raggiunto il terzo livello nel quale operano con le relazioni tra le proprietà delle figure; oppure che non abbiano raggiunto il secondo livello, e quindi non siano in grado di operare con le proprietà relative alle figure geometriche. Inoltre è da tenere presente che tale situazione coinvolge due teoremi, uno inverso dell'altro, e la capacità di riconoscere la doppia implicazione matematica è tipica del quarto livello.

Al **quarto livello** (livello della logica formale), i ragazzi cominciano ad essere in grado di distinguere formalmente tra una proposizione e la sua inversa, e possono capire cosa si intende per dimostrazione. Il pensiero si occupa del significato di deduzione, del reciproco di un teorema, della condizione necessaria e sufficiente. Si può iniziare lo studio di un sistema deduttivo di proposizioni.

Il **quinto livello**, studia la natura delle leggi logiche. Van Hiele non lo commenta, né tanto meno fornisce esempi o illustrazioni; egli considera scolasticamente assai più raro avere a che fare con questo livello, o con livelli più alti.

La concezione generale dei livelli è chiarita da alcuni passaggi presenti negli scritti di van Hiele, che sintetizziamo qui di seguito:
a) ad ogni livello appare in modo estrinseco ciò che era intrinseco a livello precedente. A livello base, infatti, le figure sono ugualmente determinate dalle loro proprietà, ma colui che pensa a tale livello non è cosciente di tali proprietà;
b) ogni livello ha i propri simboli linguistici e la propria rete di relazioni che crea i legami tra questi simboli. Una relazione esatta ad un livello, può rivelarsi erronea ad un altro livello. Si

pensi ad esempio che al livello base un quadrato non è ancora considerato come un particolare rettangolo;

c) i livelli di pensiero, come già premesso, sono inerenti al pensiero stesso e non ai singoli contenuti;

d) come un bambino non impara la lingua materna attraverso l'ascolto di regole grammaticali ma le deduce dall'uso corrente applicandole per imitazione e per tentativi ed errori, così impara la matematica semplicemente lavorando con la matematica. Le regole diventano esplicitamente discorsive quando ci si interroga sulle attività svolte a livello inferiore. L'applicazione di queste regole ha la sua importanza, ma il ruolo dell'applicazione risiede innanzi tutto nell'esplorazione dei nuovi domini, vicini a quelli nei quali le leggi sono state sviluppate;

e) due persone che ragionano a due diversi livelli hanno difficoltà nel comprendersi. Ciò accade sovente a insegnante e studente. Nessuno dei due riesce a capire il percorso mentale dell'altro e il loro dialogo continua unicamente poiché l'insegnante tenta di intuire il pensiero dello studente e ad esso si uniforma. I ragazzi non riescono a maturare un vero e proprio apprendimento se imparano, per abitudine, a manipolare relazioni matematiche che non conoscono e delle quali non hanno mai visto la nascita. Essi finiscono così per disporre della stessa unica rete dell'insegnante, identica per tutti, rete nella quale le relazioni sono di tipo logico e deduttivo. E' difficile per lo studente conservare nella memoria a lungo termine una rete di relazioni così costruita, non fondata su esperienze sensoriali personali. Nel migliore dei casi egli non conoscerà altro, oltre a ciò che gli è stato insegnato;

f) due o più persone possono capirsi, in un campo di pensiero determinato, quando esse dispongono di un linguaggio attraverso il quale recepiscono le stesse relazioni tra i segni linguistici. La certezza della matematica risiede nel modo infallibile con il quale il linguaggio matematico può essere usato;

g) la maturazione che conduce ad un livello superiore è un processo essenzialmente di apprendimento e non di ordine biologico. E' possibile dunque favorire ed accelerare tale processo.

Le fasi dell'apprendimento stimolano il passaggio da un livello inferiore ad un livello superiore e nel passaggio Scuola Media/Scuola Superiore noi ipotizziamo che le fasi subiscano una contrazione temporale ma che nessuna possa essere considerata eliminabile:

1. nella prima fase, fase di **informazione**, gli alunni familiarizzano con il dominio di lavoro, utilizzando il materiale didattico. Questo materiale li mette in contatto con una struttura, e la scoperta dell'esistenza di quest'ultima garantisce loro una base comune sulla quale impiantare una discussione, consentendo loro di avere uno scambio di opinioni sulla struttura stessa;
2. nella seconda fase, fase di **orientazione guidata**, gli studenti esplorano il campo di investigazione per mezzo del materiale. Essi hanno già capito in quale direzione lo studio è diretto; il materiale sarà scelto in modo tale che le strutture caratteristiche vi appaiano poco a poco;
3. durante la terza fase, fase di **esplicitazione**, gli studenti acquisiscono la coscienza delle relazioni, le esperienze effettuate sono collegate a simboli linguistici adeguati; gli studenti affiancano all'argomento di studio un linguaggio idoneo ed imparano ad esprimersi sulle strutture osservate durante gli scambi di idee che avvengono in classe;
4. anche se il dominio di lavoro risulta sufficientemente chiaro, i ragazzi non hanno ancora trovato il loro percorso individuale; nella quarta fase, fase di **orientazione libera**, per mezzo di compiti che hanno diversi metodi di soluzione, scopriranno la loro strada nella rete di relazioni. Ogni sorta di segnale che compare all'interno del campo d'indagine matura in loro la via da seguire verso i simboli;
5. la quinta fase, fase di **integrazione**, viene maturata all'interno del dominio di studio. Gli studenti devono ancora acquisire la visione totale degli strumenti a loro disposizione; tentano di condensare tutto il campo che il loro pensiero ha esplorato; in questo momento l'insegnante può favorire questo lavoro fornendo delle visioni globali. E' importante che quest'ultime non portino niente di nuovo, esse devono essere unicamente una sintesi di ciò che i ragazzi conoscono già.

Al termine di questa quinta fase, si giunge al nuovo livello di pensiero. L'allievo dispone d'una propria rete di relazioni che si rapporta al dominio esplorato.

Seguiamo, ora, due esempi esaminati da van Hiele.

Analizziamo, dapprima, le fasi di apprendimento che si incontrano nello studio del rombo così come è sviluppato in situazioni di insegnamento largamente diffuse al livello di Scuola Media:

- Prima fase: si sottopone all'attenzione degli studenti una certa figura, chiamata "rombo". Si mostrano altre figure geometriche e si chiede loro se anche quest'ultime sono rombi.
- Seconda fase: si effettua un piegamento del rombo intorno al suo asse di simmetria. Si comincia a dare qualche informazione riguardo le diagonali e gli angoli.
- Terza fase: gli studenti si confrontano sulle proprie idee riguardo alle proprietà del rombo.
- Quarta fase: si richiede di completare la figura di un rombo, assegnando la collocazione di uno o due vertici e di un lato.
- Quinta fase: le proprietà del rombo sono assimilate e memorizzate.

Il secondo esempio è centrato sulla trasformazione: "riflessione":

- Prima fase: si piega un foglio di carta, oppure si osserva in uno specchio. Si può osservare un certo punto **B** ottenuto per riflessione da un punto **A** rispetto ad una retta data **l.** Assegnando, su un quadrettato, l'asse di simmetria con direzione parallela ad una delle direzioni fondamentali del foglio, risulterà assai facile individuare il simmetrico del punto.
- Nella seconda fase, si mostrano una serie di figure geometriche, domandando agli studenti di trovare la loro immagine riflessa rispetto ad una retta data. Si può chiedere loro di lavorare sul quadrettato, ma risulterà ugualmente valido usare uno specchio, o fogli di carta da piegare. Effettuiamo poi due volte la riflessione rispetto a due rette perpendicolari. Assegnando in modo appropriato un segmento **AB** (con estremi giacenti ciascuno su un asse di simmetria) accadrà che la figura data e la sua riflessa formino insieme un rombo.
- Nella terza fase, si discutono i modi differenti di riconoscere le figure geometriche attraverso opportune riflessioni di altre figure (ad esempio la riflessione di un triangolo isoscele genera un rombo). In questo modo si apprende il linguaggio necessario ad esprimere le relazioni che sono state osservate.
- Nella quarta fase, si propongono esercizi riguardanti figure geometriche con assi di simmetria. Si assegnano, ad esempio, tre vertici di un trapezio isoscele, chiedendo loro di trovare il quarto. Essendo diversi i modi di risolvere il problema, questo rappresenta un esempio di "orientazione libera".

- Nella quinta fase, si richiede ai ragazzi di riconoscere una simmetria rispetto ad una retta, contemporaneamente si riassumono le caratteristiche di alcune figure aventi asse di simmetria.

Per finire annotiamo che, nella esposizione della Teoria dei Livelli, van Hiele sottolinea che:

- è opportuno sviluppare consapevolezza delle difficoltà che incontra lo studente studiando la geometria; non si tratta di prevenire i momenti critici ma piuttosto di prevederli e adeguare l'azione per accompagnare il passaggio da un livello al successivo;
- è opportuno tenere conto della composizione eterogenea della classe; anche ragazzi che iniziano ad uno stesso livello non è detto che raggiungano il livello successivo contemporaneamente;
- la transizione da un livello al successivo è un processo influenzato dal programma di insegnamento, esso non è possibile senza l'acquisizione di un nuovo linguaggio;
- è importante tenere presente che è necessario un impulso che stimoli lo studente nel passaggio ad un livello successivo.

2. DEFINIZIONI, DEFINIZIONI EUCLIDEE E TRAPEZI

L'essenza della geometria di cui parla van Hiele è l'essenza del livello 2, quando l'implicazione e la definizione cominciano ad acquistare significato nell'ambito delle relazioni geometriche. La definizione esprime le proprietà sufficienti a distinguere una figura, cioè gli *elementi minimi* con i quali descrivere un oggetto di fatto già conosciuto. Essa contiene quindi in nucleo l'idea di *condizione necessaria e sufficiente*.
L'idea, ad esempio, che l'insieme dei rettangoli sia contenuto nell'insieme dei parallelogrammi è fondamentale per il concetto di implicazione: "se un quadrilatero è un rettangolo, allora è un parallelogramma", oppure "è necessario avere le proprietà di un parallelogramma per avere quelle di un rettangolo". Qui c'è il germe della deduzione.
Ma occorre essere cauti con l'idea di inclusione: lo schema insiemistico nasconde una sottile imposizione che si perpetua nel corso di tutto il curriculum. Gli alunni hanno probabilmente una mentalità *euclidea*, hanno cioè in mente una classificazione di triangoli e quadrilateri basata su idee di regolarità, che va dalle figure più regolari a quelle meno regolari, e non viceversa.

Euclide parla di triangoli nella Definizione XX del libro I degli *Elementi*:
"Tra le figure trilatere, un *triangolo equilatero* è quello che ha tre lati uguali, un *triangolo isoscele* quello che ha solo due lati uguali, e un *triangolo scaleno* quello che ha tre lati distinti".
E parla di quadrilateri nella definizione XXII: "Tra le figure quadrilatere, un *quadrato* è quello che è sia equilatero che rettangolo, un *rettangolo* (letteralmente *oblungo*) quello che è rettangolo ma non equilatero; un *rombo* quello che è equilatero ma non rettangolo; e un *romboide* quello che ha lati e angoli opposti uguali fra loro, ma non è né equilatero né rettangolo. E chiamiamo *trapezi* i quadrilateri diversi da questi."

Euclide sembra seguire un senso estetico, definendo prima figure regolari come un triangolo equilatero o un quadrato, e poi proseguendo verso figure meno regolari. Le definizioni di Euclide sono buone definizioni? Sicuramente lo sono da un punto di vista percettivo. Forse per questo motivo hanno "seguito" presso gli studenti. E' dunque comprensibile che alcuni

insegnanti della scuola media si adattino a questa esigenza: lo scopo della geometria alla scuola media è di osservare, riconoscere, collezionare vari tipi di figure senza pensare ad in ordine logico.
Entrando nella scuola secondaria, forziamo gli alunni in una direzione che è utile per il lavoro futuro, ma dobbiamo renderci conto che inizialmente la loro classificazione delle figure geometriche è diversa. Occorre fare un certo lavoro per correggere questo "errore euclideo".
Al momento in cui comincia a dimostrare, anche Euclide cambia le sue definizioni, così il rettangolo ha quattro angoli retti e non si dice niente dei lati, e il rombo ha quattro lati uguali, e non si dice niente degli angoli.

Un altro problema è relativo all'insieme dei trapezi. Dobbiamo considerare un rettangolo o un quadrato come un particolare trapezio? La classificazione dei parallelogrammi come particolari trapezi è causa di discussioni tra i matematici. Se un trapezio è un quadrilatero con due lati opposti paralleli, allora sicuramente un parallelogramma è un trapezio. Ma allora il parallelogramma, avendo uguali anche gli altri due lati, è un trapezio isoscele, anche se non ha angoli alla base uguali. Questo è il motivo per cui molti autori preferiscono definire il trapezio come un quadrilatero in cui due lati opposti sono paralleli e gli altri due no.
Nei libri di testo italiani il trapezio compare di frequente, perché è utile per formulare esercizi. Ma nessuno dimostra proprietà per il trapezio che poi si trasportano a parallelogrammi e così via. In sostanza l'inclusione dell'insieme dei parallelogrammi nell'insieme dei trapezi non è molto interessante (se anche la consideriamo corretta): può essere utile come esercizio per discutere i concetti di definizione e di implicazione, ma non è il caso di insistervi.
Notiamo anche che per Euclide il *romboide* è il nostro parallelogramma, che si chiamerà poi proprio *parallelogramma* nelle dimostrazioni, quando sarà essenziale metterne in evidenza le caratteristiche relative, appunto, al parallelismo dei lati; *trapezio* è invece un qualsiasi quadrilatero.

Concludiamo questo paragrafo con un'osservazione di Hans Freudenthal relativa alla teoria di van Hiele:

"Ci possono essere incertezze, per esempio nel sapere se un quadrato appartiene ai rombi, o un rombo ai parallelogrammi. L'insegnante può imporre le definizioni per risolvere queste controversie, ma se fa così degrada la matematica a qualcosa che è governato da regole arbitrarie […]. Le proprietà del parallelogramma sono connesse fra loro; una di esse può diventare la fonte dalla quale sorgono le altre. Così ora nasce una definizione, e ora diventa chiaro perché un quadrato deve essere un rombo e un rombo deve essere un parallelogramma. In questo modo lo studente impara a definire, e impara per esperienza che definire è più di descrivere, e che è un mezzo per organizzare deduttivamente le proprietà di un oggetto."

COMMENTI ALLE SCHEDE DI LAVORO

Nota: le schede che vengono riportate ad illustrazione dei commenti provengono da una precedente sperimentazione. Alcuni esercizi possono avere una diversa numerazione, ma saranno comunque riconoscibili nei commenti.
La versione definitiva delle schede si trova in fondo al volume.