Il contenuto dei corsi.

Nell'individuare i contenuti disciplinari dei corsi, in particolare dei due corsi di Fondamenti, abbiamo prima di tutto scartato l'idea di trattare tutti o buona parte degli argomenti di matematica che fanno parte dei programmi della scuola elementare, sia perché sono già essi troppi per corsi come i nostri, sia perché è evidente che non basta conoscere i contenuti da trasmettere per saperli trasmettere: occorre molto di più. Inoltre non sarebbe stato facile scegliere il livello di formalizzazione a cui collocarci: quello adatto ai bambini sarebbe stato inadeguato, quello adatto a studenti universitari inaccessibile a molti e sostanzialmente inutile, se privo di adeguate mediazioni. C'è peraltro da osservare che la scelta di un taglio universitario sarebbe quella più semplice e tranquillizzante dal punto di vista del docente (e quella purtroppo più praticata), e forse anche dal punto di vista degli studenti, e avrebbe attivato ancora una volta una fin troppo diffusa e ipocrita collusione fra docente che finge di insegnare e studenti che fingono di capire.

La scelta è così caduta sulla rinuncia a coprire molti argomenti; al contrario ne abbiamo selezionato pochi, emblematici, e semplici. Per ciascuno di essi ci è però sembrato irrinunciabile, alla luce di quanto detto sulla nostra filosofia didattica, non limitarci ad un unico livello di presentazione, troppo elementare o troppo tecnico: così la scelta è stata quella di oscillare in continuazione tra più modi di affrontare lo stesso argomento, inserendo elementi tecnici, epistemologici, storici, cognitivi e didattici in stretta connessione fra di loro.

Una prassi comune, di fronte a difficoltà riscontrate da parte di studenti di ogni età con le formule e il simbolismo della matematica, è quella di rinunciare per quanto possibile all'"astrazione", sostituendo gli aspetti più formali con esempi e problemi concreti (vedi L. Russo, *Segmenti e Bastoncini*). Noi crediamo, al contrario, che l'astrazione in matematica, anche la più sofisticata, corrisponda ad un'attitudine dell'uomo attiva fin dalla più tenera età. Quando un bambino usa un manico di scopa come un cavallo o le carte da gioco con il significato che ad esse assegnano delle regole astratte e prestabilite, non è forse un processo naturale di simbolizzazione e quindi di astrazione che viene spontaneamente messo in atto? E del resto l'uso di un qualunque linguaggio, per la sua natura intrinsecamente metaforica, non rappresenta una forma di astrazione? Si fa torto ai bambini, e naturalmente a maggior ragione agli adulti, a privarli della possibilità di sviluppare questa capacità, su cui si basa, si può sostenere senza forzature, l'intero sviluppo culturale di ciascun individuo. La matematica ha in questo un ruolo fondamentale, ma purché, ed è questo il punto, i processi di astrazione in gioco siano condotti in continuità con le esperienze di vita, con lo sviluppo del linguaggio, e sostenuti da esigenze autentiche di comprensione e di comunicazione. La matematica può e deve essere vista non come una costruzione autonoma, con proprio linguaggio e proprie regole più o meno esoteriche, ma come strumento appunto per capire la realtà e comunicare con gli altri. Del resto, questo è anche quello che ci insegna la storia, secondo cui le varie nozioni matematiche sono state usate, definite e affinate allo scopo di dare senso e struttura alla realtà: vi è una continua interazione tra l'osservazione dei fenomeni del mondo fisico, la loro interpretazione in forma matematica, lo sviluppo di strutture e linguaggi della matematica, e di nuovo ricadute in termini di comprensione del mondo reale.

Tra gli argomenti che vengono trattati nei due corsi di Fondamenti (e ripresi anche nel corso di Didattica da altro punto di vista) sono inclusi:

Numeri naturali ed estensioni ai relativi, ai razionali, (e irrazionali). Rapporto tra discreto e continuo. Proprietà degli ordinamenti e delle operazioni. Rappresentazioni diverse dei numeri. Nozioni specifiche relative ai numeri naturali: divisibilità, multipli e sottomultipli, numeri primi, ecc. Proporzionalità, diretta ed inversa. Rappresentazione dei numeri sulla retta e piano cartesiano. Funzioni e relazioni, rappresentazioni geometriche e algebriche. Rette, parabole, iperboli. Rappresentazione del moto e di altri fenomeni fisici. Equazioni e sistemi. Verifiche e dimostrazioni.

Naturalmente si è dovuto "riformulare" questi contenuti per adeguarli alle necessità culturali e professionali dei nostri studenti, assolutamente diversi dagli studenti di matematica o fisica a cui sono usualmente rivolti i corsi di noi docenti di discipline matematiche. Impostare e condurre i corsi a Scienza della Formazione Primaria ha richiesto in definitiva un ripensamento sul nostro stesso modo di insegnare e sulle sue finalità. Ci siamo preoccupati in questi anni non solo di motivare gli studenti allo studio di una materia ostica per loro, ma anche di mettere a punto strategie didattiche atte a valorizzare le loro peculiari competenze.

I corsi (in particolare i due di Fondamenti) si compongono di varie "unità didattiche" variamente collegate e sviluppantisi per successivi approfondimenti. Gli argomenti, come visto, sono alcuni interni alla matematica, altri più generalmente scientifici. Le unità didattiche partono per lo più o da un'attività di osservazione inizialmente libera e che via via si struttura fino a richiedere la costruzione o il recupero di strumenti matematici, o da una situazione problematica di cui si cercano e si analizzano strategie risolutive. I "titoli" delle unità sono così spesso legati a questa loro origine. Ecco un elenco di alcune unità didattiche utilizzate in questi anni; le prime cinque sono quelle sviluppate nell'ultimo anno (2002-2003).

1. L'asino e il mulo
2. Galilei e la caduta dei gravi: ricostruiamo il percorso di Galilei con gli strumenti di oggi.
3. Il Principe e il Cavaliere
4. I Sassolini
5. Rettangoli isoperimetrici e equiestesi.
6. Gli Elastici, ovvero Forze, Deformazioni e Funzioni lineari.
7. Il galleggiamento (tappi e chiodi) e le proprietà dell'uguaglianza.
8. Superfici cilindriche (da E. Castelnuovo) e diversi tipi di funzione.
9. Algoritmi: la moltiplicazione egiziana e le diverse basi di numerazione.
10. Luci ed ombre

È difficile dare il senso del percorso globale, che si sviluppa come un puzzle di cui alcuni pezzi si costruiscono, altri si evocano da esperienze o ricordi scolastici e tutti, per raccordarsi, generano continuamente nuove domande. Tipicamente durante il corso vengono introdotte almeno due attività contemporaneamente, ovvero leggermente sfalsate nel tempo, di solito una di problem solving o modellizzazione di esperienze di fisica elementare ed una più legata alla strutturazione disciplinare matematica, con consegne per casa relative ad entrambe. Tale scelta consente di assecondare maggiormente gli interessi della classe: il lavoro procede sull'attività su cui gli studenti hanno elaborato spunti e argomenti di discussione, e intanto si aspetta che le riflessioni sull'attività più "ostica" maturino in un clima di "libertà controllata". In altre parole, siamo convinti che sospendere per un certo periodo un argomento configuri una strategia di rispetto dei tempi degli studenti, dei quali cerchiamo per quanto possibile di non forzare le conclusioni. Ci è anche capitato talora di aver abbandonato attività che non facevano presa sulla classe, per la verità di rado, o di aver deciso di sviluppare qualcuna in modo meno approfondito rispetto ad altre. Nello stile del nostro lavoro è frequente anche il caso in cui tutta una serie di domande sollevate da noi o dagli studenti non ricevano subito risposte. In questi casi gli studenti sono invitati a cercare da soli tali risposte, con proprie considerazioni, con ricerca su testi, o semplicemente ad appuntarsi i quesiti non risolti e a cercare di riconoscere se in altre occasioni, magari più avanti, verrà la risposta.

Le attività sono lo scenario all'interno del quale si collocano i contenuti matematici, che non necessariamente sono quelli che erano stati previsti nella programmazione didattica, o comunque non in un ordine prestabilito. Ogni tanto qualche lezione di tipo frontale serve a fare il punto su alcuni argomenti e a fissare per tutti gli studenti alcuni concetti. Ma nessuno di essi, e in particolare quelli più importanti, si ritiene acquisito una volta per tutte: essi si arricchiscono e si integrano fra loro in una rete sempre più salda e fitta di significati e collegamenti (nel senso del *concept image* di Tall) via via che si sviluppano nuove attività.

Ad esempio la prima volta quest'anno il piano cartesiano è servito per rappresentare il moto uniforme; in questa occasione gli studenti hanno adottato automaticamente degli impliciti relativi al piano cartesiano generati dalla pratica didattica precedente: posizionamento del tempo sull'asse delle x e dello spazio sull'asse delle y, continuità del grafico della funzione $s = s(t)$, carattere continuo delle variabili s e t, e così via. Durante l'attività "Asino e mulo" (vedi più avanti), proposta poco dopo, è sorto il problema di come posizionare le variabili sugli assi, che ha consentito di approfondire argomenti come funzioni e grafici, invertibilità, funzioni lineari e proporzionalità diretta, e di riflettere sulla "visione globale" della relazione che il piano cartesiano fornisce; allo stesso modo la scelta dell'unità di misura dei "mezzi quintali" ha permesso di scardinare o rivisitare l'abitudine ad assumere in modo stereotipato come insieme di definizione e codominio di una funzione sempre i numeri reali. Al riguardo si è rivelata molto interessante per gli studenti la scoperta che le caratteristiche dell'insieme di definizione di quella particolare funzione fossero connesse alla scelta concreta del considerare divisibili o no i mezzi quintali. Infine, solo nell'attività "Principe e Cavaliere", più avanti nel corso, è emersa la consapevolezza che posizionare il tempo sull'asse delle ascisse consente di "leggere" la velocità e capire la differenza tra i comuni grafici di tipo economico o "di andamento" che si osservano quotidianamente sui *media* e il grafico cartesiano di una funzione matematica continua (cfr. la discussione sui "pianerottoli"…). Ancora, la rappresentazione grafica delle misure di tempo e spazio nella riproduzione dell'esperienza di Galileo sul piano inclinato ha creato la necessità di definire il punto "sperimentale" in maniera diversa dal punto matematico (cfr. ad es. "Elastici").

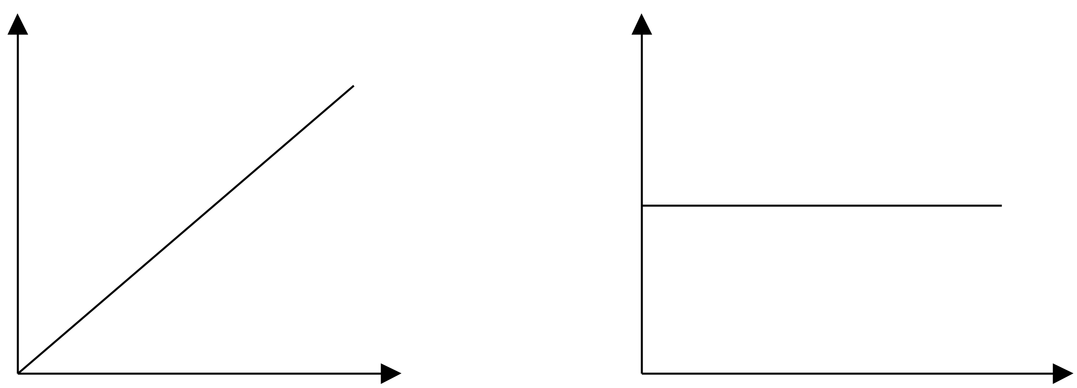

Figura 1. *Il tipico aspetto del grafico di un moto (rettilineo) uniforme rispetto agli assi t e s, e quello dello stesso moto riferito alle variabili t e v.*

Tutte queste “lenti”, ed altre ancora, ci sembrano importanti per scomporre gli automatismi generati dalla pratica didattica tradizionale di cui si diceva a proposito del moto rettilineo uniforme. Ad ulteriore testimonianza della loro insistente presenza, segnaliamo la grande difficoltà ad accettare come grafico di un moto rettilineo il secondo riportato in Figura 1, riferito agli assi t e v, in alternativa al primo, riferito agli assi t ed s. Se invece sono stimolati dal bisogno di capire, gli studenti mettono in atto modi di guardare diversi, variamente correlati, e l’esposizione ad una varietà di contesti e di situazioni, in un processo costruttivo ed interindividuale, fa sì che alcuni di essi si modifichino, altri si stabilizzino o evolvano completandosi e sostenendosi a vicenda.

Nel modulo di Didattica vengono ripresi molti degli argomenti già discussi nei moduli di Fondamenti, in una diversa articolazione di problematizzazione e di discussione. In questo caso si pone particolarmente l’accento:

a) sui legami profondi che esistono fra le strutture aritmetiche e geometriche elementari e le strategie fondamentali di pensiero-linguaggio-percezione-azione naturale;

b) sulla necessità di affrontare la progressiva strutturazione (a lungo termine) di una competenza “astratta”, a partire da una approfondita padronanza “variazionale” di famiglie di situazioni-prototipo, via via correlate fra loro, distinguendo e confrontando i piani della formalizzazione e della modellizzazione fisica;

c) sull’efficacia di percorsi articolati su situazioni sempre abbastanza complesse e strutturate (in relazione al livello cognitivo) da costituire uno strumento efficace di controllo (una volta padroneggiate) e uno stimolo provocatorio alla riflessione (in corso di apprendimento);

d) sulla notevole “convenienza” a lungo termine nello sviluppare diverse competenze strutturali (aritmetiche e geometriche) secondo schemi di sviluppo parallelo invece che seriale: per esempio affrontando insieme le quattro operazioni su numeri “piccoli” e le loro più ovvie rappresentazioni spaziali, “separandole” così dalla complessità della rappresentazione decimale dei numeri e quindi dell’operatività su numeri “grandi”; collegando ogni aspetto della struttura formale a semplici situazioni sperimentali che ne siano evidentemente “messe in forma”, e quindi costituiscano al tempo stesso un supporto all’astrazione e un feedback/guida alla bontà della modellizzazione; analizzando con cura le strutture cognitive di base che determinano anche la struttura grammaticale, sintattica e semantica della lingua naturale (sistemi e variabili, stati e trasformazioni, causalità e correlazioni, ipotesi e argomentazioni, categorie e predicazioni, …), determinandone i diversi ruoli nel condizionare comprensione e apprendimento; e così via.

In particolare le famiglie di problemi sono articolate intorno alla gestione degli “intrecci” fra strutture additive e moltiplicative, di traslazione e di proporzione che quasi sempre caratterizzano (spesso al di là delle capacità di esplicitazione degli stessi insegnanti) le più “normali” situazioni problematiche. In questo contesto un ruolo cruciale giocano da un lato la corretta gestione della dimensionalità (additiva e moltiplicativa) delle diverse variabili; dall’altro una approfondita meta-comprensione (sia nella mediazione didattica che nell’apprendimento) del ruolo dinamico dell’uno e dello zero, sia nella matematizzazione di ogni situazione concreta che nella formulazione di strategie di soluzione efficaci; infine la distinzione, precoce e via via approfondita, fra variabili estensive ed intensive, e quindi (in senso lato) fra strategie di misura e strategie di trasduzione.

Un’ultima nota: in modo solo apparentemente paradossale ci sono meno attività esplicitamente “concrete” nel modulo di Didattica che in quelli di Fondamenti. Costituisce infatti per noi una prova del successo dell’approccio complessivamente seguito nei tre moduli la capacità metacognitiva acquisita dagli studenti di immedesimarsi con efficacia (anche con lavoro “a casa”) in situazioni magari soltanto evocate o avviate, a partire dalla vita quotidiana o dagli spunti offerti dal materiale di lavoro in classe. Pensiamo che questo costitusca un buon contributo ad una seria professionalità.