LEZIONE 9: 27 marzo 2003

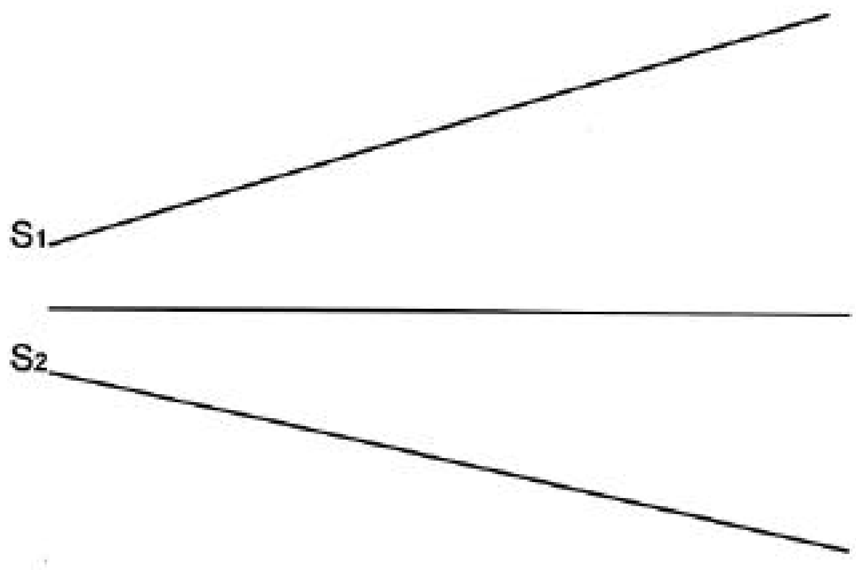
Spazio e Geometria, a cura di Daniela Costa e Sara Valisnieri

Continua l'analisi del compito F8-1 iniziata nella lezione 8 con la valutazione del primo elaborato

Oggi analizziamo alcuni testi relativi al trapezio isoscele.

<u>Analisi del secondo elaborato</u>

<u>Professore</u> Il testo cita ***«esiste un solo caso in cui i segmenti passanti per PIQI e P2 Q2 sono paralleli anche se SI e S2 non lo sono».***
E' vero; è il caso della configurazione del trapezio isoscele.
«Traccio una retta che sia bisettrice dell'angolo formato dalle rette SI e S2 nel loro punto di incontro quindi porto i segmenti SI S2 ad incontrarsi e traccio la bisettrice; considero tale retta piano di proiezione attorno al quale è ribaltata di I80° la retta SI».

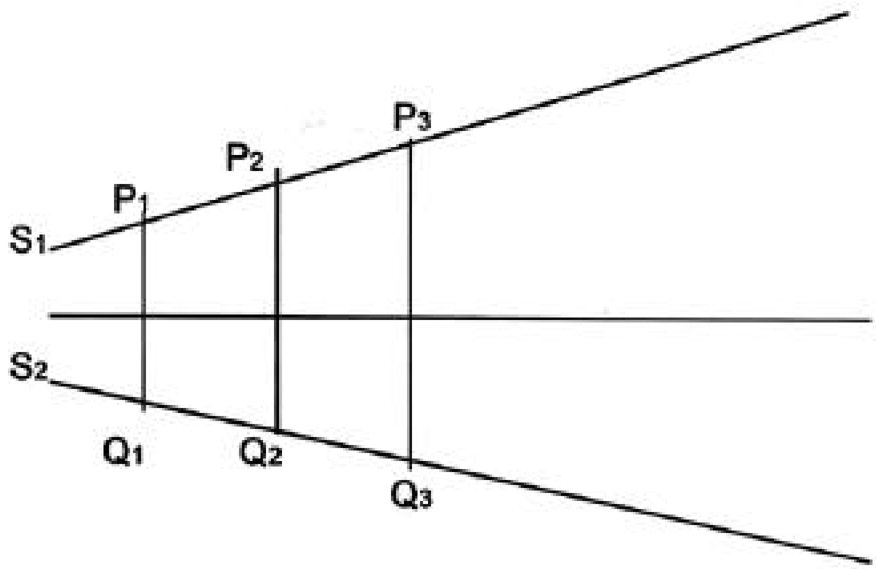


<u>Professore</u> Qui c'è un problema di espressione, di terminologia; c'è un'idea di ribaltamento attorno alla retta ma il piano non c'entra niente.
Si dovrebbe dire, invece che piano di proiezione, asse di simmetria attorno alla quale ribalto di **180°** gradi la retta S1.
Siamo di fronte ad un'improprietà lessicale.

<u>Studente</u> Però ai fini della risoluzione del problema, parlare di asse di simmetria non è

necessario.

Professore Esatto non è necessario, è pleonastico. Nel momento in cui ho tracciato la bisettrice non è necessario specificare che la stessa è asse di simmetria: lo è e basta!
Torniamo a «piano di proiezione» invece che «asse di simmetria»: lo si può considerare un errore di basso livello ma spesso gli insegnanti danno troppa importanza a errori del genere.
«Prendo sulla retta SI i punti PI, P2, P3 equidistanti tra loro e riporto tali punti sulla retta S2 trovando QI, Q2, Q3 e traccio i segmenti PIQI, P2Q2, P3Q3».



Nella spiegazione, la studentessa specifica una cosa che non sarebbe necessaria; cosa?

Studente Dire che i punti sono equidistanti

Professore Esatto è una cosa superflua ed inoltre per risolvere il problema è sufficiente tracciare due segmenti

Studente Non bisognerebbe specificare il modo in cui si prendono?

Professore Lei ha specificato questo dicendo che è fondamentale che questi segmenti siano perpendicolari al «piano di ribaltamento» (che abbiamo capito essere «asse di simmetria»).
Però attenzione, detto così, può sembrare che essi godano di una proprietà fondamentale quasi automaticamente, si tratta invece di una proprietà che è necessario esplicitare nel seguente modo: traccio perpendicolarmente all'asse di simmetria i segmenti P1Q1 e P2Q2 (rispettando quindi l'ordine della costruzione).
Essendo questo un punto didatticamente delicato, poiché si tratta non di «dare una soluzione» ma di

«aiutare a trovarla», quale sarebbe l'aiuto più idoneo alla correzione?

<u>Studente</u> Secondo me la struttura della frase non rispecchia la successione logica nella quale si dovrebbe operare. Se la persona provasse ad eseguire l'esercizio esattamente come lo descrive, i segmenti non verrebbero perpendicolari perché questo è stato detto solo in un secondo momento.

<u>Professore</u> Attenzione peròl La persona probabilmente aveva in testa la costruzione giusta.
In questi casi la cosa migliore non è far eseguire il disegno direttamente alla persona; nel caso in cui questa disegnasse perpendicolarmente i due segmenti, l'insegnante si troverebbe in un vicolo cieco, in quanto non potrebbe farle notare la carenza della sua espressione linguistica. Probabilmente si tratta solo di una sfasatura tra espressione linguistica ambigua e non corretta e costruzione pensata correttamente.
Questa situazione si può evitare facendo disegnare direttamente l'insegnante su indicazione dell'alunno. Così facendo l'insegnante avrebbe la possibilità di estrapolare l'interpretazione erronea del testo dimostrando che i segmenti non vengono perpendicolari (se tale condizione non è indicata all'inizio della costruzione).
In tal modo l'alunno si renderebbe conto che è necessario menzionare prima la perpendicolarità come proprietà fondamentale.

<u>Studente</u> E' necessario che ci sia per forza la bisettrice?
<u>Professore</u>
Questa è una delle costruzioni possibili ma non l'unica.
Si potrebbe fare lo stesso lavoro con gli angoli, con il compasso (cioè con i triangoli isosceli); in ogni caso verrebbe la stessa cosa.
Nel suo elaborato la studentessa conclude affermando che «... ***in questo modo i segmenti sono tra loro paralleli»;*** questa è una costruzione empirica, non teorica, potremmo accettarla da un bambino ma non da un adulto.
Perché vengono paralleli tra loro?

<u>Studente</u> Perché sono perpendicolari alla stessa retta.
<u>Professore</u>
Ok, questo è sufficiente perché si tratta di una delle condizioni che garantisce il parallelismo. E' vero che la costruzione che stiamo esaminando non è l'unica costruzione possibile, tuttavia è la costruzione che dà luogo alla giustificazione più immediata.

<u>Studente</u> Si poteva anche dire che vengono segmenti paralleli perché mantengono la stessa distanza?

<u>Professore</u> No, quello andrebbe provato, ricordando che rette perpendicolari ad una stessa retta mantengono la stessa distanza; quindi è meglio usare la definizione di perpendicolarità ad una stessa retta che verifica subito il parallelismo.

<u>Studente</u> Sarebbe sbagliato dare un'ulteriore precisazione dicendo che i lati non paralleli del trapezio hanno due angoli uguali?

<u>Professore</u> Perché complicarsi la vita, non è necessario farlo. In fondo cosa dobbiamo dimostrare? Solo il parallelismo, nient'altro.

Ricordiamoci delle tre proprietà equivalenti del parallelismo; due rette complanari per essere parallele devono:

- Non incontrarsi mai
- Mantenere la stessa distanza
- Essere perpendicolari ad una stessa retta

<u>Studente</u> Basta realizzarne una delle tre?

<u>Professore</u> Naturalmente, perché nel piano queste proprietà sono equivalenti tra loro e quindi detta una è implicita l'esistenza delle altre.

<u>Studente</u> Però nell'esempio che ha fatto la studentessa sembra che mantengano la stessa distanza.

<u>Professore</u>

E' vero ma parliamo di giustificazione teorica; nel momento in cui la persona ha realizzato rette perpendicolari alla stessa retta, ho la garanzia che queste siano parallele.

<u>Studente</u> Esiste solo questo caso?

<u>Professore</u>

Si, quello del trapezio isoscele.

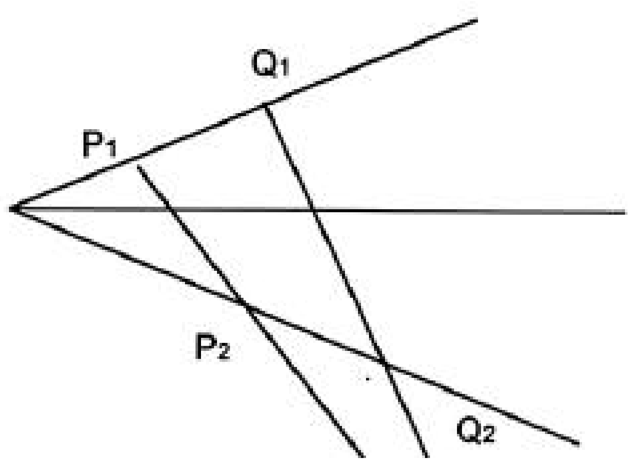
<u>Studente</u> io ho scritto che ci può essere anche un altro caso in cui le rette parallele sono oblique ma so che sbaglio, perché?

<u>Professore</u>

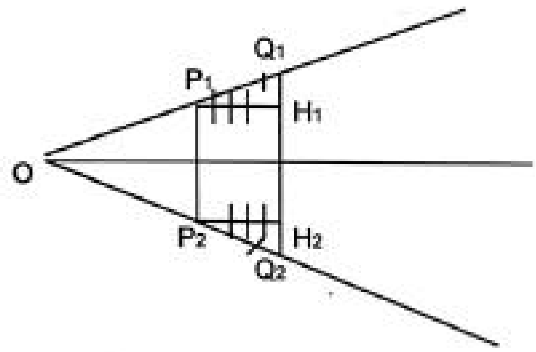
Ok proviamo, la vostra collega ci sfida a dire che non esistono altri possibili casi al di fuori del trapezio isoscele, proviamolo!

Supponiamo che, dal punto di vista teorico, ci sia una situazione in cui due segmenti sono trasversali e paralleli tra loro senza che la figura sia un trapezio isoscele.

Supponiamo che per una certa angolazione PIQI sia uguale a P2Q2 e PIP2 sia parallelo a QIQ2; facciamo vedere che necessariamente PIP2 e QIQ2 sono perpendicolari alla bisettrice (cioè stiamo dimostrando che l'unica configurazione possibile è quella di perpendicolarità alla bisettrice e non ci sono altri casi possibili). Dimostriamo che se c'è parallelismo ci deve essere perpendicolarità alla bisettrice.



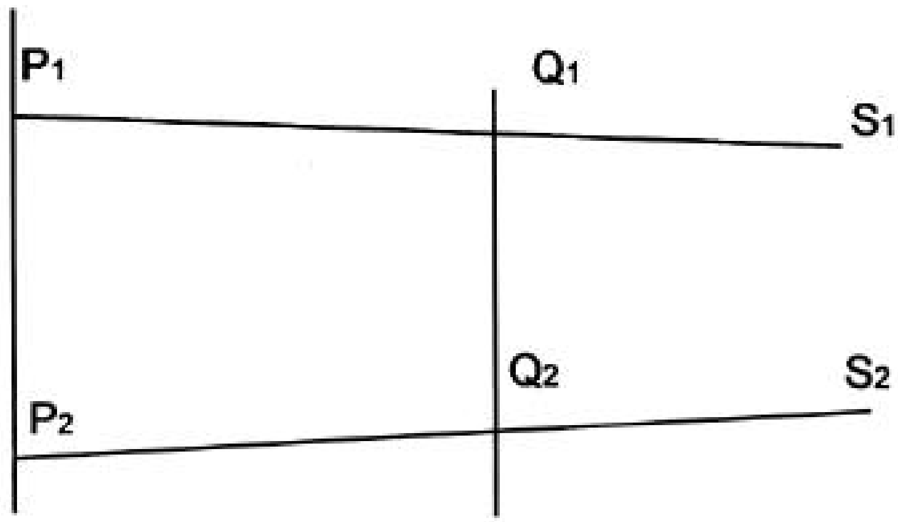
Professore considero i punti PI e P2 e traccio le due perpendicolari al segmento QIQ2 partendo da essi, troverò così il punto HI e il punto H2. Viene così a formarsi un rettangolo di angoli PI P2 HI H2 e due triangoli uguali QIPIHI e Q2P2H2 (uguali perché si tratta di triangoli rettangoli con ipotenuse uguali e cateti PIHI e P2H2 uguali).
Quindi i triangoli PIOP2 e QIOQ2 sono ISOSCELI (oltre che simili). (Ricordiamo a questo punto che in un triangolo isoscele la bisettrice coincide con l'altezza e quindi è perpendicolare alla base).



Nel nostro caso quindi la bisettrice è perpendicolare a PIP2 e a QIQ2. Ecco che in questo modo abbiamo costruito la dimostrazione che non puo esserci altra possibilità diversa dalla bisettrice perpendicolare alle trasversali parallele.
Quindi diciamo che una soluzione completa a livello adulto del problema ci dice che la costruzione del triangolo isoscele oppure la costruzione della perpendicolarità alla bisettrice sono equivalenti e sono le uniche costruzioni che danno luogo al parallelismo dei segmenti trasversali.

Analisi del 3° elaborato

Professore Questo elaborato è il più difficile da esaminare perché appare un elaborato completo dal punto di vista formale.
Quando vi trovate davanti ad un protocollo di questo tipo bisogna fare molta attenzione perché, essendo un ragionamento apparentemente corretto e completo è difficile, se c'è, trovare una carenza di natura logica. Bisogna analizzarlo con attenzione.
Perché per esempio nel trapezio due lati sono paralleli e due no.



<u>Professore</u> Qui abbiamo due rette 51 e 52 quasi parallele e ci sono poi dei punti PIP2.
Lo studente dice: ***«ho tracciato due rette non parallele SI* S2; *prendendo due punti su SI, misuro la loro distanza e riporto il segmento su S2.»***

<u>Studente</u> Secondo me è già sbagliato che abbia detto ***«considero un trapezio»;*** ci sono tanti trapezi, dovrebbe specificare che si tratta di un trapezio isoscele.
Io comunque gli avrei chiesto se si riferiva ad un trapezio generico o ad uno in particolare.

<u>Professore</u> Giusto, questa è una domanda possibile da porre.
Però attenzione la persona intende dire che in tutti i trapezi due basi sono parallele e due no; questa frase, di per sé, è incontestabile.

<u>Studente</u> Secondo me si potrebbe far disegnare al bambino il trapezio che lui ha in mente (che sarà senz'altro un trapezio isoscele) e a quel punto domandargli quale tipo di trapezio ha disegnato, da cosa l'ha dedotto e quali sono le caratteristiche che da esso emergono.

<u>Professore</u> Questa è un'osservazione corretta.
L'affermazione dello studente che nel trapezio due basi sono parallele non è sbagliata in quanto noi dobbiamo proprio cercare una configurazione di quadrilatero con due lati paralleli e, come conseguenza di questo ragionamento, dovrebbe scaturire il trapezio isoscele.
E' importante seguire il ragionamento dello studente passo per passo cercando di aderire al suo pensiero.
Questo è un aspetto che rende il lavoro dell'insegnante piacevole e stimolante.

Studente Lo studente probabilmente risponde all'ultima domanda presente nel testo **«può succedere che tali segmenti siano paralleli?»**

<u>Professore</u> E' vero ma il ragionamento è inadeguato anche se la premessa e buona.
Lo studente scrive: ***«traccio due rette non parallele SI S2,, prendo due punti su SI (PI e QI), misuro la loro distanza e riporto il segmento PI QI su S2; traccio la retta che unisce QI e Q2 e con il metodo di rette perpendicolari alla stessa retta verifico che PI P2 è parallelo a QI Q2 (questo avviene anche se SI e 52 non sono parallele)»***
Cosa c'è che non va in questo ragionamento?
Il fatto che PI P2 parallelo a QIQ2 sia inteso empiricamente ma non giustificato teoricamente.

<u>Studente</u> Secondo me la perpendicolarità è vista rispetto a S2, perché probabilmente lo studente ha disegnato le rette quasi parallele; se le avesse disegnate più incidenti magari non avrebbe fatto l'errore.

<u>Studente</u> Qui però non viene detto a quale retta si riferisce la perpendicolarità.

<u>Professore</u> E' vero! Qui manca qualcosa, perpendicolare a quale retta? Questo andrebbe precisato. Supponiamo che dica perpendicolare a S2, come andiamo avanti? Sarebbe praticamente la configurazione del trapezio rettangolo.

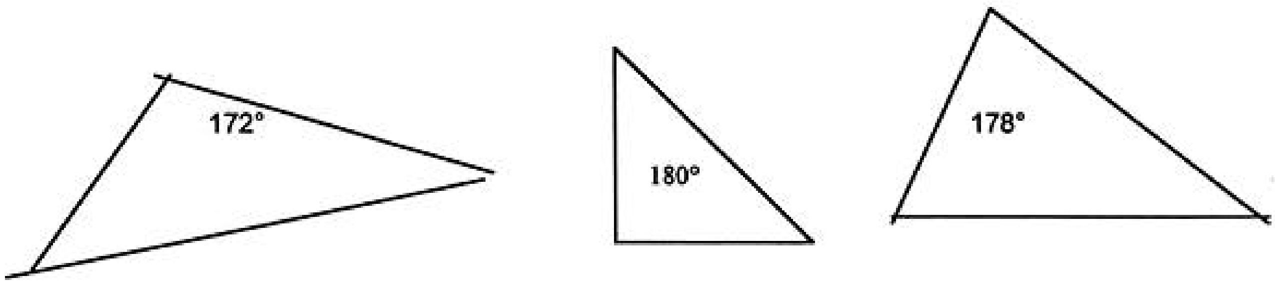
<u>Studente</u> Anch'io ho ragionato così; non ho detto a cosa erano perpendicolari. Un'idea potrebbe essere quella di far fare allo studente il ragionamento al contrario.
In questo caso si dovrebbe partire disegnando due segmenti perpendicolari a S1 di uguale lunghezza e tracciare la retta S2 collegando gli estremi di tali segmenti. Tale retta non potrà sicuramente essere parallela a SI.
Verificare infine se effettivamente P2Q2 è uguale a PIQI (il che non sarebbe possibile).

<u>Professore</u> Attenzione però se lo studente è abbastanza astuto da rendere SI e S2 non lontani dal parallelismo è empiricamente (cioè con gli strumenti da disegno) molto difficile riuscire a invalidare la costruzione. Però attenzione supponiamo che effettivamente lo studente abbia inteso la perpendicolarità a S2, allora cosa si potrebbe fare di fronte al disegno di un trapezio rettangolo?

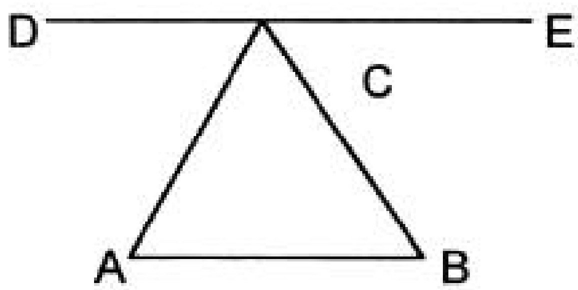
<u>Studente</u> Di fronte a questo testo l'insegnante potrebbe fare un disegno sotto dettatura del bambino facendogli vedere che la sua costruzione non regge; potrebbe riportare su S2 il segmento fatto su S1, ma molto spostato, facendogli notare che non è possibile metterlo a caso e che quindi ci sarà qualcos'altro da fare.

<u>Professore</u> Potrebbe essere un'idea cercare di intervenire sulla pratica del disegno, estremizzandolo, mostrando che la sua costruzione non regge; nonostante questo il bambino si potrebbe ostinare a volerlo fare come l'ha proposto all'inizio.
Empiricamente questo lavoro non è da rifiutare; si può rifiutare solo sulla base di considerazioni teoriche.
Per il livello adulto è da rifiutare, per il livello bambino può andare.
Questo è lo spazio di ambiguità tra la geometria dei bambini (a base empirica) e la geometria a base

teorica.
Nei curricula del 2001, nella prospettiva di lavorare sui sette anni nella scuola di base, uno dei punti previsti era proprio il passaggio dalle soluzioni empiriche ai primi ragionamenti teorici in modo tale da giustificare la necessità del ragionamento teorico.
Facciamo un esempio di ciò che ho detto.
Prendiamo una proprietà: la somma degli angoli interni di un triangolo è di **180°.**
Disegno tanti triangoli e, sommando l'ampiezza dei loro angoli, trovo che vengono misure vicine (ma non uguali) a 180°



Viene così perché dipende da una configurazione particolare o perché nel disegno è così?
Questa è una buona motivazione per un ragionamento teorico ovvero disegno il triangolo ABC, traccio la parallela a AB. Dato che l'angolo ABC èuguale all'angolo BCE e l'angolo DCA è uguale all'angolo CAB, posso asserire che la somma degli angoli del triangolo ABC è un angolo

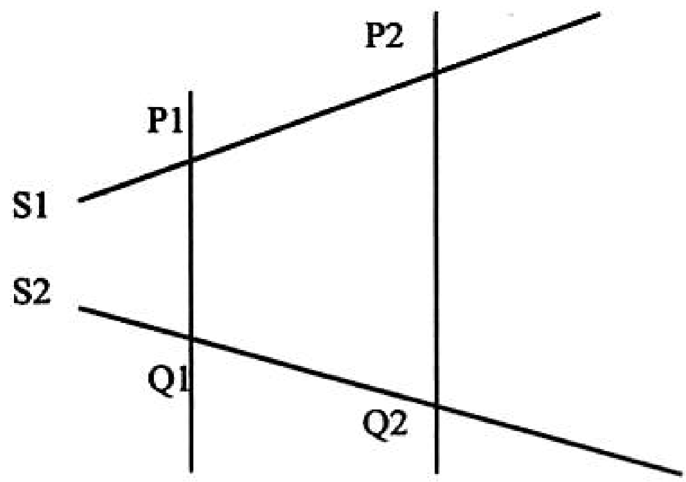


piatto e quindi misura **180°.**
La geometria teorica nasce in Grecia legata all'esigenza di avere un sistema di conoscenze che fosse idealmente perfetto, è un'esigenza legata allo sviluppo filosofico delle teorie sulla verità.

Analisi del 4° elaborato

<u>Professore</u> La prima frase è la parafrasi di ciò che è stato detto nel testo.
La seconda parte» ***può però succedere in un caso particolare che tali segmenti siano paralleli anche se SI e 32 non sono paralleli, se infatti pensiamo alla costruzione di un trapezio isoscele***

abbiamo le basi che sono parallele tra loro e possiamo chiamarle PIQI e P2Q2; i due lati di uguale misura li possiamo chiamare PIP2 e QIQ2».



« il trapezio isoscele realizza la configurazione che ci interessa considerando le basi segmenti trasversali e gli altri come lati. I due segmenti SI e S2 sono evidentemente non paralleli mentre le distanze PIQI e P2Q2 sono parallele».

Cosa manca in questo testo?

Manca la costruzione del trapezio isoscele.

Siamo sicuri che con i due segmenti così disposti possiamo realizzare il trapezio isoscele?

Diciamo che questo testo va bene ma è incompleto.

Non basta dire che è un trapezio isoscele, bisogna anche dimostrarlo. Il testo diventa quindi soddisfacente dal punto di vista letterario ma non del contratto didattico. Se nel contratto didattico c'è l'accordo che ogni affermazione va giustificata, allora l'elaborazione è incompleta.

Attenzione a rendere sempre esplicito con i bambini il contratto didattico che può essere differente nelle diverse realtà didattiche.