Lezione 16: 28/04/03
NUMERI DECIMALI E MISURE

VERBALE (a cura di Carla Ivaldi, Claudia Celentano e Maria A. Mazzotta)

ore 9.00-9.30

P: oggi analizziamo un DUBBIO che alcuni di voi hanno sollevato nel lavoro di due lezioni fa su numeri razionali, frazioni e percentuali: **una frazione è un numero oppure no?** Su questo dubbio è bene chiarire le idee, perché la questione non è banale, è un problema serio prossimo a quello che ha occupato i matematici per un certo tempo, da quando (alla fine del XVI secolo) si è iniziato a scrivere i «numeri razionali» in forma decimale. Da quel momento in poi si è posto il problema se la scrittura decimale fosse un scrittura legittima per i «numeri razionali», in particolare se fosse più o meno legittima della scrittura sotto forma di frazione (usata fino ad allora).
Per iniziare la discussione è necessario che ci sia un momento di riflessione. Quindi vi chiedo di prendere posizione sul problema.
Da/punto di vista didattico è una pratica *opportuna anche in classe, incominciare a fare lavorare i bambini su una questione (che non sarà risolta dai bambini) in modo che inizino a rjletterci, per avere poi argomenti da discutere durante un successivo momento di discussione gestita dall 'insegnante.*
Richiamiamo quello che abbiamo visto la volta scorsa.

Consegna del **F16-1.**
Ne/ foglio 14-2 è stato posto i/problema seguente.
'quali relazione ci sono tra le seguenti esvressioni:
numero razionale frazione nercentuale?
Esse indicano lo stesso concetto oppure no? Quando si usano?
Ci siamo soffermati nella lezione 15 sull'errore insito nel considerare la frazione m/n come m parti uguali tra le n in cui è suddivisa l'unità. Di tale errore si trova traccia in vari elaborati ad esempio. ***«le tre espressioni non indicano lo stesso concetto. Frazione si usa per indicare parte di un intero»***
Consideriamo ora queste altre risposte, che pongono un problema assai delicato.
«La frazione non è propriamente un numero razionale»
«I numeri razionali sono interi e decimali. Invece le percentuall e le frazioni esprimono un rapporto: non sono numeri ma un rapporto di numeri»
Commentare tali affermazioni, prendendo posizione su esse.

Oggi vediamo una questione delicata. Dovete prendere posizione su questo argomento in una decina di minuti. Dopodiché faremo la discussione ed esporrete le vostre idee in proposito.

Ore 9.30-9.45
Elaborazione F16-1.

Ore 9.45-10.15
P: Si potrebbe riproporre un dibattito avvenuto in Europa tra la fine del Cinquecento e tutto il

Seicento, quando **STEVINO** nel 1585 ha proposto la scrittura decimale posizionale dei numeri non interi.
Quadro storico: nelle culture antiche da cui noi deriviamo (Greci e Romani), i numeri interi e le frazioni si scrivevano a parole o con simboli usati in forma additiva (sono ben noti i simboli usati dai Romani); non c'erano i numeri negativi. I numeri interi e le frazioni venivano considerati come entità diverse. Gli Egizi scrivevano i numeri interi con il simbolismo additivo e le frazioni con simboli ideografici (per esempio il simbolo usato per 1/2 richiamava la divisione in 2 parti uguali, 1/3 era un simbolo speciale di significato religioso, 1/4 era la combinazione di 1/2 e 1/2). Via via nell'Europa Medievale si afferma il sistema di scrittura degli Arabi (elaborato dagli Arabi prima del 1000 d.C. prendendo idee dall'India, «contaminate» dagli Assiro-Babilonesi). In Italia si incominciano a scrivere frazioni nella forma:
3 **f** 4 (il 3 è stato diviso in 4 parti), ove **f** indica «fractus»
Nelle origini *5* **f** 4 non creava problemi: era il numeratore che si divideva per il denominatore. E stata una questione scolastica quella che ha portato a pensare «l'intero diviso in quattro parti e ne prendo tre».
Quindi nel mondo del Cinquecento ci sono:

- gli interi (ormai scritti in forma decimale posizionale)
- le frazioni *(5* **f** 4**)**
- non ci sono ancora simboli per la divisione.

La invenzione di Stevino è sconvolgente! Quindi 5 / 4 diventerà 1,25 (1 unità e 2decimi di unità e 5 centesimi di unità).
A questo punto si scatena un dibattito: è lecito scrivere le frazioni anche in questo modo? Il problema nasce dal fatto che 1/3 non può essere scritto 0,3 e nemmeno 0,33 oppure 0,333 Non è una vera e propria uguaglianza. Questa uguaglianza è una coincidenza che vale in qualche caso (come ad esempio *3/4=0,75).* Ma il VERO numero è: 3/4, 1/3....
Secondo i matematici del Seicento, quindi, i numeri del tipo *«1,25»* sono usati solo dai «vili contabili» e dai «vili meccanici»! La matematica invece deve lavorare con le frazioni, entità pure e precise. Per i veri matematici i numeri interi e le frazioni devono restare ben separati dai «numeri con la virgola». Il legame con i decimali è quindi messo in discussione. Dall'altra parte, astronomi, fisici, ecc. reagiscono sottolineando (come difetti) che una frazione non è un solo numero ma una coppia di numeri, che addirittura più frazioni (in realtà, infinite frazioni!) hanno lo stesso valore numerico, ecc. ecc.; e sottolineando altresì come, stando così le cose, sia particolarmente macchinoso fare operazioni con le frazioni (in particolare le somme: sommare 0,75+1,5+1,125 è molto semplice con l'incolonnamento delle cifre di ugual valore, mentre sommare 36/48+30/20+9/8 comporta parecchie operazioni preliminari). Nei libri dell'Istituto Magistrale che risalgono all'inizio del Novecento restano tracce di queste incompatibilità di punti di vista: gli argomenti «numeri interi», «frazioni» e «numeri decimali» sono nettamente separati (con una separazione più netta tra «frazioni» e ««numeri decimali»).
È bene che voi conosciate questo percorso storico perché riflette le difficoltà e gli ostacoli che si sono incontrati nella storia e perché l'uomo ha impiegato un secolo circa per superarli.

DISCUSSIONE
P: Professore
S: Studente
P: chiedo alla vostra compagna se può raccontare bene i suoi dubbi.

S: Io ero partita considerando una frazione diversa dai numeri interi e decimali perché sulla linea numerica avrei difficoltà a mettere frazioni come 1/3. La frazione esprime un rapporto tra due numeri interi il cui risultato dà un numero intero o decimale. Solo il risultato di questo rapporto può essere messo sulla linea dei numeri e non la frazione.

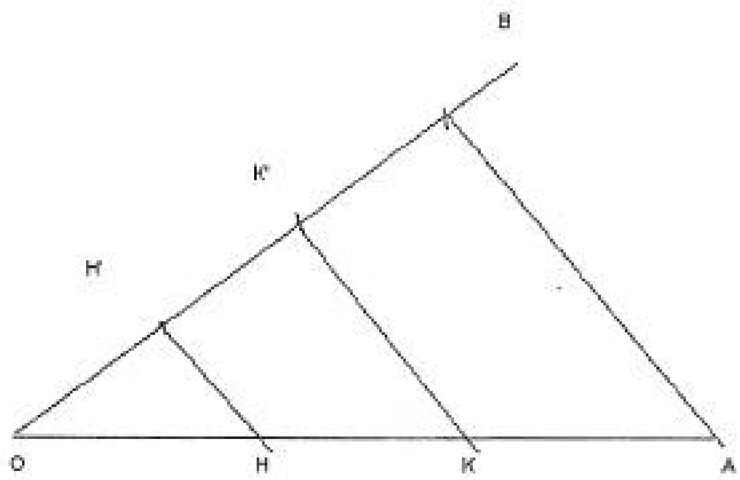
P: attenzione! Questo è un argomento «forte». La vostra compagna solleva due questioni:

a) la frazione sono due numeri in relazione tra loro che poi (eseguiti i calcoli) ne genereranno un terzo
b) la frazione può essere difficile da collocare sulla linea dei numeri in modo «preciso» Cosa pensate di questo?

S: la frazione non è un numero razionale ma indica un numero razionale. Però se devo usare la linea dei numeri, non va più tanto bene per segnare le frazioni, perché tra il numero intero cinque e il numero intero sei ci sono gli infiniti numeri decimali tra i quali 5,3 periodico, però non riesco a trovarlo sulla linea.

S: secondo me invece la frazione è un numero razionale, però è rappresentato sotto forma di rapporto tra due interi.

P: abbiamo visto la volta scorsa che dal punto di vista geometrico la collocazione della frazione 1/3 diventa un esercizio banale di costruzione geometrica.



Tracciamo un segmento OA. Per dividerlo esattamente in tre parti uguali, tracciamo un altro segmento OB (linea ripartitrice) lungo a piacere che abbia la stessa origine O. Prendiamo un segmento OH' su OB e lo riportiamo (ad esempio col compasso) fino ad ottenere H'K' e K'B . A questo punto uniamo B con A, e tracciamo le parallele K'K e H'H. In questo modo otteniamo la tripartizione del segmento OA.
Questo metodo non veniva accettato da molti matematici del '600 perché era una costruzione che mescolava due mondi separati, come se oggi per esempio mescolassimo biologia e fisica. L'unione di geometria e aritmetica (con le coordinate) è stata proposta da Cartesio nella prima metà del Seicento ma in parecchi paesi europei (tra cui l'Italia) ha tardato a diffondersi.

Torniamo ora al problema della rappresentazione decimale di 1/3: per segnare 1/3 sulla linea dei numeri senza ricorrere al metodo geometrico devo fare un calcolo (divisione), ma 1/3 è diverso da 0,3

5: come facciamo a spiegare questo concetto ai bambini?
P: Oggi abbiamo alcune teorie che aiutarlo a descrivere cosa sono i concetti, in particolare quella di VERGNAUD. Qual è la differenza? L'attenzione è spostata sulle situazioni di riferimento, sulle proprietà e sulle rappresentazioni. Inoltre si parla dell'uso che faccio di questi concetti come indicatore della padronanza di essi. Per il concetto di numero razionale: lo incontro quando devo fare per esempio 3/4 di un segmento, quando parlo del 75% in statistica, quando scrivo: 0,75 m.
Per quanto riguarda le rappresentazioni linguistiche possiamo scrivere:

un quarto =1/4 *=0,25=25%* =2/8 =25/100
L'inventore del simbolo = è il signor RECORDE (fine Cinquecento). Egli manda un messaggio ai suoi collaboratori: *«ho avuto un'idea: abbiamo problemi a dire che una cosa è uguale ad un 'altra, usiamo allora due tratti* ***uguali tra loro*** *per ricordare che ciò che sta a sinistra ha lo stesso valore di ciò che sta a destra» (*è importante che non dica: «sono la stessa cosa», ma «hanno lo stesso valore»I.

Quindi in questo caso 1/3=2/6=10/30 MA: 1/3≠0,3333 perchè ho soltanto un'approssimazione.
Rimane la «zona oscura»: come scrivo in forma decimale e in percentuale un numero come 1/3? Il numero periodico può essere approssimato a piacere. In questo modo posso scrivere che 0,333.. =33% mentre resta da mettere in relazione 1/3 con 33% o 33,3%.
Indicazioni didattiche:

- *Trarre dal mondo extrascolastico molte situazioni di incontro con i numeri razionali (nelle varie forme in cui vengono espressi. numeri con la virgola, frazioni, percentuali, parole...) per creare risonanza con l 'esperienza quotidiana dei bambini.*
  Mettere in evidenza le proprietà a poco a poco Proporre riflessioni sull'»uguale»

Per le frazioni equivalenti, viene di solito usata la TORTA. Così il bambino può vedere che 1/4 èuguale a 2/8 perché la torta può essere divisa in 4 parti uguali (selezionandone 1) e in 8 parti uguali (selezionandone 2), e si vede che non cambia l'entità della parte selezionata. Ma si potrebbe anche usare il righello (e constatare che non solo 1/4=2/8, ma che 3/2=6/4, ecc.)

Torniamo all'obiezione della vostra collega: l'obiezione ha sollevato un problema che fa parte delle discussioni sulla didattica della matematica ancora oggi.

S: come si puù affrontare a scuola il problema che 1/3 non è esattamente 0,33% o il 33%?

P:in una ricerca che ho coordinato in *5* classi si vede che i bambini di V possono ragionare su queste cose, possono pensare in termini di qualcosa *che non finisce* (cioè 0,333 che va ancora avanti scrivendo tutti i 3 che voglio). Volendo, l'insegnante può però tralasciare per un certo tempo la scrittura decimale delle frazioni come 1/3, e lavorare solo con 1/2, 1/4.
Altre questioni?

S: Facendo tirocinio ho visto che nella scuola di Camogli usano il «circa»: 1/3 è circa 0,33, o 33%

P: in ambienti sociali particolari come quello di Camogli (i genitori dei bambini hanno quasi tutti almeno il diploma di scuola superiore) si possono affrontare argomenti più alti, posso dire 1\3 circa 33% Alcuni usano il simbolo ~ per dire «circa».Questo è un modo onesto per dire come stanno le cose.

Ore 10.15-10.30
Consegna F16-2
Questo lavoro vi servirà per chiarire alcune questioni: per esempio il fatto che 3,0 è lo stesso numero razionale rappresentato da 2,999999999.