

Lezione N. 7, 17 marzo 2003

SPAZIO E GEOMETRIA

VERBALE a cura di Debora Jole Garbarino e Daniela Gualco

Ripresa di argomento trattato nelle lezioni precedenti: (dal vocabolario Garzanti) Sul vocabolario viene riportato il significato matematico di «perpendicolare» e il significato di «a perpendicolo» come equivalente a «verticale». In effetti anticamente «perpendicolo» era il nome del filo a piombo (cadere a perpendicolo = cadere verticalmente, perpendicolarmente rispetto ad una superficie piana).

Correzione dell'esercitazione proposta la settimana precedente:

*Verificare la verticalità di un bastone, disponendo di: una squadretta, una tavola ed una livella a bolla (essendo perciò sprovvisti di filo a piombo).*

Analisi critica del primo elaborato (**in F 5. 2**):

(INDICAZIONE DI LAVORO: Provare concretamente a seguire le istruzioni, fornite del testo, al fine di capirne procedure, tecniche e processo di pensiero sottostante).

«*Appoggio la squadretta sulla tavola di legno, facendo in modo che un lato della squadretta sia parallelo ad un lato della tavola*». Discussione del fatto che la squadretta potrebbe essere coricata oppure posta «in piedi» (verticalmente): dal testo e dal disegno non si capisce.

«*Metto la livella a bolla in modo che sia parallela all'altro lato della tavola*». La ragazza parla di posizionare la livella a bolla in modo da metterla parallela all'altro lato: confusione, in quanto il lettore potrebbe interpretare: a) lato ortogonale o b) lato opposto. Nei riguardi della prima versione, forse più vicina alla trascrizione del pensiero seguente, ci sono delle riserve in quanto il disegno non corrisponde.

«*Se il bastone è perpendicolare alla livella a bolla e tra il bastone e il lato della squadretta parallelo al piano c'è la stessa distanza il bastone è in posizione verticale*». La difficoltà oggettiva nel capire tale elaborato dipende dall'elaborato stesso, in particolare dalla difficoltà dell'autore (frutto di mancata preparazione scolastica in tal senso) nel far corrispondere l'espressione verbale alle azioni immaginate o compiute. Per un futuro insegnante è importante imparare a padroneggiare tale abilità al fine di poterla sviluppare nei bambini. Se l'insegnante ha difficoltà a fare corrispondere l'espressione verbale alle azioni immaginate o compiute, alla «realtà», è poco probabile che i bambini possano riuscirci *da soli!* Il bastone può essere perpendicolare alla livella a bolla in più posizioni (disegno 1).

Durante la ripetizione ad alta voce del ragionamento della ragazza. Sara dice: «*La bolla, lei, l'ha posizionata di sotto, nel disegno, così viene più semplice capire la spiegazione*», il prof. accoglie il suggerimento. (disegno 2).

Dopo il disegno modificato e l'aggiunta del bastone, Erika dice: «*Il parallelismo nel disegno lei lo*

*confronta fra il bastone e l'altro cateto della squadra invece scrive il lato della squadra parallelo al piano, ha scritto una cosa, ma poi nel disegno è diverso. Cioè lei dice se il bastone è alla stessa distanza del lato parallelo al piano sembra che in qualche modo debba essere parallelo... ,ma poi nel disegno invece si capisce che forse il parallelismo è fra il bastone e il cateto non appoggiato della squadra». Interviene Sara: «Perché nel disegno della squadretta in teoria il cateto di sinistra dovrebbe essere parallelo al bastone». Ribadisce Erika: «Si perché, infatti, è quello che intendeva, cioè il parallelismo fra un cateto ed il bastone, ma poi non lo scrive», il professore interviene: «E' possibile che a monte ci sia l'equivoco di pensare che basta una sola posizione della livella a bolla per controllare la verticalità del bastone e persino della tavola, invece sarebbe preliminarmente necessario utilizzare la livella a bolla (lungo due direzioni distinte) per sistemare la tavola in orizzontale, dopo di che della livella possiamo anche disinteressarci. Il bastone potrebbe essere benissimo perpendicolare alla livella a bolla, senza essere verticale; la livella a bolla indica semplicemente una sola retta orizzontale, e ciò non basta, con la perpendicolarità controllata con la squadretta, per controllare la direzione verticale del bastone.(errore matematico riferito alla padronanza dello spazio)» (disegno 3, commento: «se metto una livella a bolla che mi individua una retta orizzontale, prendo una squadretta e la poggio con il cateto minore su di essa, se la faccio ruotare ho tante posizioni assunte dalla squadretta con il cateto maggiore perpendicolare alla retta orizzontale individuata, ma soltanto in una di queste il cateto maggiore è verticale». «Questo è uno dei tanti testi che ha dietro l'idea che basti una posizione, una retta orizzontale, per caratterizzare, attraverso la perpendicolarità la verticalità. Inoltre c'è un serio problema della corrispondenza parole scritte, azioni e disegno». Sara interviene: «Stavo pensando al fatto che venga specificato che la livella venga messa parallela a un lato e la squadretta all'altro, anche se c'è l'errore per non controllo dell'orizzontalità, però non è detto che non sia l'idea che bisogna controllare l'orizzontalità in due direzioni», Il prof. dice che «è possibile, però è un'idea sconnessa con il resto del testo».*

Analisi critica del secondo testo. C'è qualcosa di recuperabile?

- 1) «Appoggio la livella ad un lato della tavola e all'altro lato parallelo appoggio la squadra, ad un lato della squadra appoggio il bastone».. Prof. «Questa volta viene fatto dall'alto verso il basso, sotto». (disegno 4). Questa volta disegno e testo sono molto chiari e coerenti fra loro. Dal punto di vista dell'analisi di un elaborato del genere fatto da un bambino, l'elaborato deve essere valutato non concentrando l'attenzione solo sull'errore; un elevato livello di chiarezza e di corrispondenza pensiero/testo/ disegno/ azioni fatte o immaginate è molto importante. Bisogna valutare molto positivamente lo sforzo di spiegazione e la soluzione ottenuta (anche se errata!) con una propria procedura di pensiero ben verbalizzata»~
- 2) «Quando la bolla sarà al centro della livella il bastone sarà parallelo». Prof: «Ma parallelo a che cosa, potrebbe essere parallelo al cateto verticale. In quanto parallelo è un termine relazionale e non la qualità intrinseca, però dal disegno si può capire!».
- 3) L'ultima parte del testo: l'ammissione è importante. Prof: «lo studente in sostanza sostiene: quello che ho detto in realtà non va bene per verificare la verticalità del bastone; un insegnante dovrebbe dire all'alunno: 'non hai risolto il problema ma te ne sei reso conto e hai fatto l'analisi delle disfunzioni del ragionamento così prodotto'. Ciò è molto importante e positivo'. Bisogna

verificare quest'ultimo passaggio, il ragazzo si è reso conto dell'entità e della natura dell'errore o ha solo il sentore che qualcosa non vada? Il testo non consente di accertarlo al 100%, però proviamo...». (disegno 5, commento del prof:» *Può succedere che facendo ruotare la squadretta (e il bastone aderente al cateto) la rotazione appiattisca contro il piano squadretta e bastone, fino a che il bastone diventa orizzontale, mantenendo la perpendicolarità della squadretta al piano e la livella con la bolla al centro*», Intervento di Francesca:» *Però è anche vero che quando dice di mettere la squadra che sia perpendicolare implicitamente è il piano della squadra che deve essere perpendicolare, ma non il suo cateto. Il problema che si è posta è sul piano. Intendeva: posso commettere errori nel momento in cui la bolla può essere al centro anche se il piano non è orizzontale* », il prof. risponde: *«Ciò non è esplicito, Inoltre, ci può essere un'altra interpretazione, oltre al fatto di capire che questa sola posizione della livella a bolla non controlla l'orizzontalità del piano: l'aver capito che facendo ruotare la tavola sul lato parallelo alla livella a bolla, la bolla non si muove, ma il piano non è orizzontale. Nell'uno e nell'altro modo c'è la coscienza che il problema non sia stato risolto*». Erika fa un'obiezione:» *io ho il piano, posiziono la livella parallela ad un lato e mi controlla l'orizzontalità solo ditale lato, poi posiziono la squadretta vicino al bastone, solo in quel caso posso dire che il bastone è verticale*». il prof. risponde:» *No, perché nonostante il piano assuma diverse posizioni e la bolla resti al centro, la squadretta può assumere molte posizioni, ruotando*». Questa è una delle attività di lavoro sullo spazio più interessanti che aiutano i bambini a pensare e a ragionare.

Correzione del compito a casa (**foglio F6. 1**). Soluzioni trovate:

- 1) Elisabetta: (con aggiustamenti del prof.): *«Dal punto di vista pratico, empirico se SI è quasi parallelo a S2 e se tra PI e QI, ed RI e R2, la distanza (uguale) è breve, allora in genere PI P2 sembra quasi parallela a RI R2*». Non è distinguibile il non parallelismo dal punto di vista fisico-empirico (controllo a vista, misura). E' molto importante con i bambini accettare risposte a livello empirico, perché il fondamento dei loro apprendimenti è in quello che posso toccare, misurare, cercare attraverso il disegno. Si tratterà poi di passare ad un livello di ragionamento più teorico. Per cui un problema del genere risolto in tale modo è accettabile a livello di quarta o quinta elementare (disegno 6).
- 2) Francesco dal punto di vista teorico: *«L'ho fatto in due modi: I) Ho ricostruito il problema al contrario: visto che quella figura è un quadrilatero: quale quadrilatero ha due lati congruenti non paralleli e due lati paralleli? Il trapezio isoscele. II) Poi ho dimostrato la similitudine dei due triangoli OP2PI e OQ2QI. Per dimostrarlo ho utilizzato l'apertura di un compasso in O, in modo da avere la certezza che OPI = OP2 e che OQI = OQ2, e che quindi PIQI=P2Q2 per costruzione; i due triangoli OP2PI e OQ2QI hanno l'angolo in O in comune, per cui gli altri angoli saranno uguali perché opposti a lati uguali e quindi se quegli angoli saranno a due a due uguali (angolo in Pi = angolo in Qi e angolo in P2 = angolo in Q2), allora quelle due rette passanti una per PI e P2 e l'altra per QI e Q2 saranno parallele per il teorema di Talete*» Prof. :*«Questo è un lavoro che vi ricorda le dimostrazioni delle superiori; c'è un 'valore aggiunto' in questa spiegazione, ossia l'uscita dalla figura proposta, immaginando altre configurazioni = PROCESSO DI ABDUZIONE: si va a cercare quali sono le condizioni che permettono di funzionare a quella configurazione (di parallelismo matematico teorico) che si cerca. Notare che*

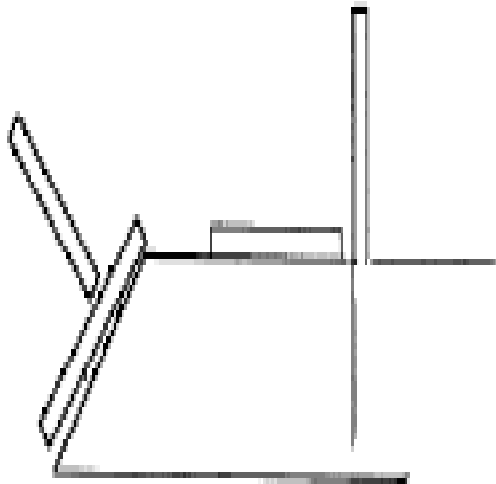
Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova  
MATEMATICA II

*il teorema di Talete è usato «alla rovescia»: dall'uguaglianza (in generale, dalla proporzionalità) dei segmenti individuati dalle rette secanti si inferisce il parallelismo. Potevamo anche arrivare alla soluzione un altro modo: tracciare due rette parallele per  $PI$  e  $P2$  e per  $QI$  e  $Q2$  e cercare di aggiustare  $PIQI = P2Q2$  e poi vedere cosa veniva fuori, cioè una configurazione di triangoli isosceli». Interviene Elisabetta: «A me l'altra volta è proprio Talete che mi ha indotto a pensare sbagliato: quelle due erano parallele per il teorema di Talete: «. Il prof. : «Ma Talete usato come?», Elisabetta: «Mi sono ricordata di una figura fatta sul quaderno alle superiori: due rette oblique e poi tutto il fascio di rette parallele sopra». Il prof. : «Ma nel teorema di Talete abbiamo già il parallelismo, là (F5.1) mancava il parallelismo per cui non si poteva applicare».*

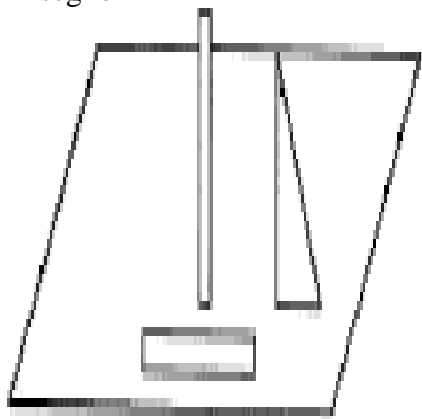
Questa è una tipica attività di invenzione che può essere condotta o cercando di immaginare che cosa può permettere il parallelismo, tipo il trapezio isoscele o Talete, oppure immaginando di aver risolto il problema ed empiricamente osservarne il risultato (disegno) e inferirne le condizioni teoriche...

Un'attività come questa si può proporre ai bambini di IV-V elementare come laboratorio di matematica, naturalmente senza ricorrere a Talete e al criterio di similitudine dei triangoli.  
(disegno 7)

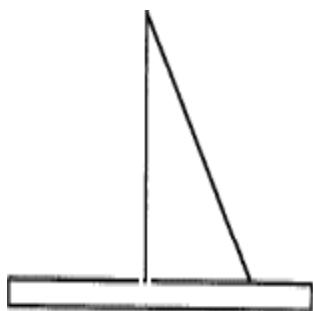
Disegno I



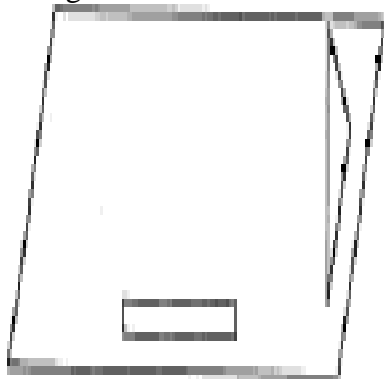
Disegno 2



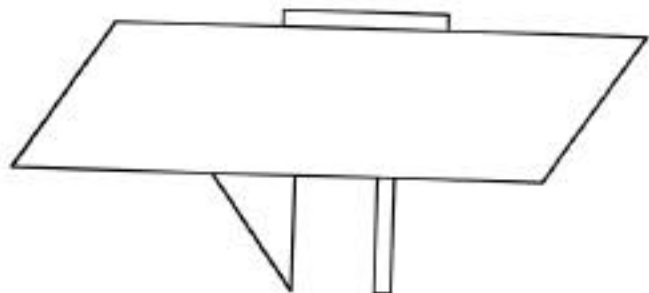
Disegno 3



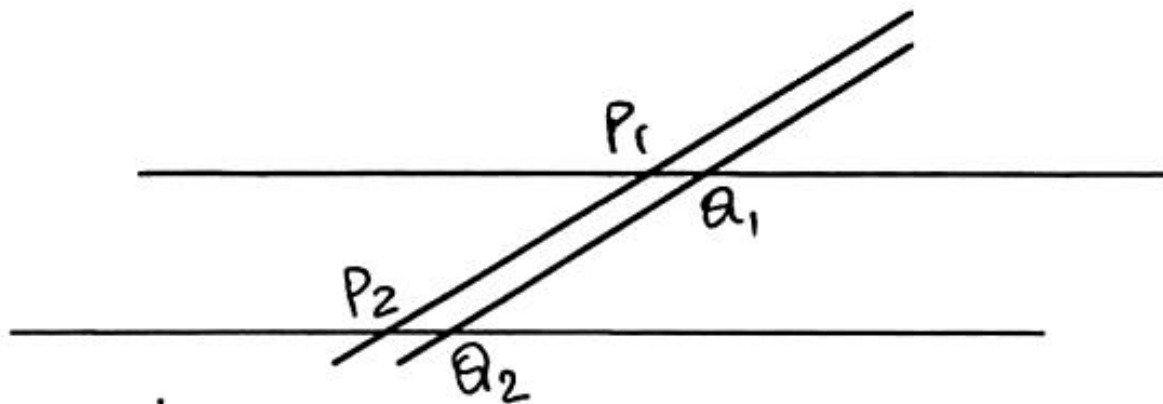
Disegno 4



Disegno 5



Disegno 6



Disegno 7

