

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova
MATEMATICA II

Lezione 2: 24/02/03
SPAZIO E GEOMETRIA

VERBALE (a cura di Carla Ivaldi e di Maria A. Mazzotta)

ore 8.50-9.00 Sintesi della lezione numero 1

La discussione avvenuta nella lezione precedente ha messo in evidenza alcune questioni interessanti: chi pensava che *orizzontalità* e *verticalità* fossero concetti fisici, in realtà non sapeva come spiegarlo, e non sapeva come verificare *orizzontalità* e *verticalità*.

Perché tutto ciò?

Alla base c'è probabilmente un uso improprio dei termini *verticale* e *orizzontale*. Gli assi cartesiani, per esempio, vengono disegnati sul foglio posato sul banco entrambi orizzontali, però per convenzione uno di essi è detto «verticale». L'uso traslato di *verticalità* e *orizzontalità* maschera il significato fisico più preciso.

VERTICALITÀ è la direzione del filo a piombo, cioè: un segmento è verticale se è disposto secondo la direzione della forza di gravità. La *verticalità* cambia nei diversi punti della terra: un filo a piombo verticale a Genova non è verticale a Tunisi, perché la *verticalità* segue il raggio terrestre.

ORIZZONTALITÀ di un piano è quando il piano è parallelo al pelo dell'acqua in un bicchiere (concetto di natura fisica). L'*orizzontalità* della superficie del mare quando è calmo cambia da un punto all'altro della terra. Infatti l'*orizzontalità* della superficie del mare calmo dalle «nostre» parti non è la stessa dell'*orizzontalità* all'Equatore.

La DIREZIONE è la proprietà comune ad un fascio di rette parallele, o anche: è un punto all'infinito verso cui convergono per illusione prospettica le rette parallele (pensare ai binari del treno, ai lati dell'autostrada in un rettilineo). La *direzione* è un concetto geometrico, però è pleonastico nella geometria euclidea (è sufficiente dire «rette parallele», non è necessario parlare di «rette che hanno la stessa direzione»).

Suggerimento didattico: in questo corso costruiamo il nostro fascicolo personale per seguire il nostro percorso di apprendimento. Si tratta di una metodologia utile che come insegnanti possiamo adottare in classe. Questa metodologia corrisponde infatti, in classe, all'uso dei QUADERNONI, cioè di quei supporti grafici sui quali i bambini registrano il loro percorso di apprendimento, con momenti di sintesi e di sistemazione da parte dell'insegnante. Purtroppo il quadernone è stata sostituito, in molte classi di scuola elementare, in modo piuttosto discutibile, dalle schede.

ORE 9.00-10.30

In riferimento al lavoro a casa F1.3, discussione sui commenti delle colleghe alle risposte dei bambini (tratte da loro elaborati di verifica).

I bambini prima della verifica hanno svolto una lunga attività di geometrizzazione: hanno avuto a che fare con PARALLELISMO e PERPENDICOLARITÀ come CONCETTI GEOMETRICI modellizzanti lo spazio fisico, e con ORIZZONTALITÀ e VERTICALITÀ come concetti fisici,

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova
MATEMATICA II

che hanno cioè senso nello spazio fisico. Hanno sistemato tavolette in orizzontale usando le livelle a bolla; hanno imparato che mettendo due livelle lungo due direzioni diverse si controlla l'orizzontalità della tavoletta. Dopo di che hanno fissato e stabilizzato i concetti attraverso la verbalizzazione e sono arrivati qualche giorno dopo a sostenere una prova di verifica, in cui trovano due disegni in prospettiva e la seguente domanda: *disponendo due livelle come nella figura C o nella figura D in quale caso è possibile controllare se la tavoletta è orizzontale? Spiega il tuo ragionamento.*

Con la domanda «in quale caso» si capisce che la risposta prevede **un** solo caso. La maggior parte ha scelto la risposta giusta cioè la D, ma per alcuni bambini non è chiara la ragione della scelta.

Al di là della risposta giusta o sbagliata dobbiamo cercare di capire il ragionamento che fa il bambino.

Lettura dell'elaborato di INES: *«secondo me la disposizione delle livelle è giusta quando si mettono come in D perché se le metto come in C e poi sposto la tavola non succede niente».*

Lettura di esempi di commenti di colleghe:

Sì scelta disposizione, ma spiega perché non va bene in C, non perché va bene in D e non utilizza il linguaggio corretto. Argomentazione scadente

Non corretto il ragionamento, probabilmente la bambina non ha capito l'esperienza.

Il ragionamento è giusto, ma andrebbe espresso meglio. Se la metto come in C posso verificare se la tavola è orizzontale soltanto in un solo senso.

Ines ha risposto esattamente pur essendo imprecisa. Parla di spostamento della tavola, ma non dei diversi tipi di inclinazione. Non parla neanche dei diversi movimenti delle due bolle. Secondo me è la risposta peggiore rispetto alle altre.

Apertura della DISCUSSIONE.

P: Professore S: Studenti

P: Tutti avete rilevato che è giusta la risposta, ma c'è un carenza nel ragionamento verbalizzato. Per individuarla, proviamo a dire come avrebbe potuto essere formulata la risposta, facendo attenzione al pericolo in cui si potrebbe incorrere facendo questa analisi a priori. Quale pericolo?

S: Assumo un modello di riferimento.

P: Assumo un modello solo! Infatti se il problema ammette più ragionamenti si rischia di privilegiare il nostro personale punto di vista e di non vedere i possibili ragionamenti corretti degli alunni. Sarebbe meglio prima leggere elaborati di diversi bambini, cercare di capire per ciascuno di loro quali sono le carenze e quali le forme di ragionamento e poi eventualmente arrivare a uno o più modi corretti di ragionare, da usare come riferimenti per l'analisi degli altri elaborati.

S: C non va bene perché in C è garantita l'orizzontalità solo in una direzione.

P: Vediamo formulazioni alternative o miglioramenti di questa formulazione

S: Ines doveva dichiarare la posizione della bolla

P: In un secondo momento parleremo di questo, ora stiamo cercando di produrre un elaborato senza considerare le osservazioni agli elaborati dei singoli bambini.

S: In C è garantita l'orizzontalità solo in caso di rotazione attorno ad un'asse del piano. Forse non si capisce il discorso della direzione. La direzione non dà l'idea che si stia parlando di un piano. La rotazione è rispetto a un'asse del piano.

S: Al posto di direzione forse sarebbe meglio dire dimensione

P: Che cosa dite del termine «dimensione»?

S: Forse dimensione implica un concetto di grandezza.

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova
MATEMATICA II

P: E un termine molto ambiguo e polisemico. Piuttosto è meglio mettere «lungo una sola direzione». Ora cerchiamo di capire che relazione c'è tra il dire «in una sola direzione» e dire «secondo l'asse di un piano, attorno ad uno dei lati più lunghi». Questa seconda affermazione dà qualcosa in più del semplice dire «lungo una direzione»

S: La scorsa volta abbiamo parlato delle rette perpendicolari ad un piano...

P: Abbiamo visto che condizione necessaria e sufficiente affinché una retta, che incontra un piano in P, sia perpendicolare al piano è che sia perpendicolare a due rette del piano incidenti in P e non coincidenti. Nel caso considerassimo una sola retta avremmo la perpendicolarità in una sola direzione.

S: Se consideriamo i vari tipi di spostamento lungo una sola direzione le due bolle in C vanno bene. In caso di rotazione lungo un asse le bolle segnano lo spostamento, in caso di rotazione lungo l'altro asse la bolla non segna lo spostamento anche se è avvenuto.

P: Andiamo a leggere quello che hanno scritto i bambini (il prof. ribadisce la pericolosità di un'analisi a priori con ricerca DELLA soluzione giusta che può impedire di vedere ragionamenti alternativi. Vediamo cosa succede nel nostro caso.) Torniamo a Ines: chiaramente il suo elaborato è incompleto.

S: Forse la bambina voleva dire quello che abbiamo detto nella nostra frase.

P: Cosa potremmo fare per aiutarla? Cosa potremmo scrivere sul suo foglio?

S: «Cosa vuol dire sposto?»

S: «In che modo?»

P: Potremmo scrivere queste due domande: - «in che modo non succede niente?» — «cosa vuoi dire non succede niente? «... nell'elaborato di Ines c'è un'intuizione. Si ha la sensazione che la bambina, usando la terminologia di Vygotskij, si trovi nella *zona di sviluppo prossimale*.(VEDI NOTA ¹)

La bambina sembra avere intuito qualcosa, probabilmente con una serie di domande scritte potrebbe migliorare la qualità del suo pensiero, grazie alla sollecitazione dell'insegnante

Lettura dell'elaborato di LORI: «*è giusta la figura D perché le bolle sono disposte in due sensi così si misura la pendenza, sia nel senso della larghezza sia nel senso della lunghezza. Invece nella C si misura la pendenza in un senso solo*».

P: Qui siamo ad un altro livello.

S: Mi è sembrata corretta ma mi chiedevo cosa Lori intendesse con il termine senso

P: La volta scorsa abbiamo visto che in una stessa direzione ci sono due sensi. Questo è l'uso corretto oppure no?

S: La bambina usa «senso» come direzione

P: Possiamo accettare il termine «senso» perché in realtà Lori lo usa nel significato del linguaggio comune (nel l.c. «senso» viene usato allo stesso modo di direzione e verso). «Senso» e «verso» indicano però in linguaggio matematico uno dei modi di percorrere una retta.

Lettura dell'elaborato di RENZO: «*è giusto nella figura D perché puoi veder se è orizzontale sia la lunghezza sia la larghezza e quindi una dimensione in più di quanto si vede nella C*».

S: Il bambino ha il concetto in testa ma ha forse un po' di confusione nel linguaggio.

P: Qui c'è un «teorema in atto» (*Vergnaud*): una proprietà implicita - Un assioma della geometria euclidea dice che *per caratterizzare un piano bastano due rette*. Come spieghereste questo ai bambini?

S: Proporrei un'attività di posizionamento di tavole su due cavalletti.

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova
MATEMATICA II

P: Oppure un foglio di compensato inchiodato su due asticelle...

Perché allora non mi bastano due rette parallele per ottenere l'orizzontalità? Devo garantire la verticalità della direzione perpendicolare. Un piano in qualunque modo è messo nello spazio contiene almeno due rette orizzontali. Riuscite a tracciare su un foglio almeno due rette orizzontali?

S: Qualsiasi piano prendo in considerazione se uso il sistema di riferimento interno ad esso posso considerare rette parallele orizzontali o verticali.

S: No, qui stiamo parlando di rette veramente orizzontali

P: in senso fisico

P: Trovate un modo per convincere un bambino di IV o V elementare che su un piano posso individuare almeno due rette orizzontali.

S: Con la livella a bolla

P: C'è un modo ancora più convincente. Prendo una bacinella piena d'acqua colorata e immergo una tavoletta a profondità diversa. Così potrò vedere segnate due rette orizzontali. In realtà le rette orizzontali di qualsiasi piano sono infinite. Nell'elaborato di Renzo c'è in atto il teorema dell'orizzontalità del piano che si caratterizza con l'orizzontalità lungo due direzioni diverse. Nonostante il linguaggio un po' «duro» il bambino dimostra di essere in *pieno pensiero formale* e anticipa il pensiero formale di tre anni rispetto ai tempi previsti da Piaget (probabilmente a causa dell'interferenza positiva dell'ambiente culturale del bambino). Quando Renzo dice «dimensione in più» usa un'espressione molto alta perché è un salto verso un'espressione generale. *Attenzione a non svalutare espressioni che hanno una forte potenzialità di ragionamento.*

Lettura dell'elaborato di ROSA: *«è giusto il modo D perché si hanno due informazioni. Se il piano è inclinato da una parte e si mettono le livelle nel modo D la bolla che sta nella parte inclinata si sposta mentre quella messa orizzontalmente non si sposta».*

S: Probabilmente è la migliore; è l'unica che ha scritto che in caso di orizzontalità la bolla rimane al centro. (Ci sono stati problemi nell'interpretazione del disegno)

Gli insegnanti dovrebbero fare lo sforzo di capire, prima di dire che qualcosa è sbagliato, perciò la tecnica della domanda scritta è utile così come quella del PRESTAMANO (nota²). Bisogna fare attenzione alla comunicazione da parte del bambino: per esempio le parentesi che Rosa mette nel disegno...

Nelle argomentazioni scritte dai bambini possiamo accettare il fatto che spieghino soltanto perché in C non va bene; infatti *per confutare una affermazione matematica basta fare un controesempio.*

Rosa dimostra di avere capito perché fa vedere l'inclinazione della tavoletta. Come fanno i bambini a giungere a ragionamenti così?

S: Hanno fatto tante prove

P: Sicuramente l'esperienza serve. I bambini danno una giustificazione che C è sbagliata, ma di cosa avrebbero bisogno per giustificare che D è giusta?

S: Sapere che un piano è individuato da due rette. Le due livelle sono le due rette.

P: Avrebbero bisogno di un supporto teorico, di un TEOREMA (riferito al modello geometrico della situazione spaziale): *un piano è orizzontale se e solo se contiene due rette orizzontali incidenti (cioè che hanno un punto in comune) e non coincidenti.*

S: Nell'esempio D le livelle sono situate perpendicolarmente. Se le rette su cui giacciono le due livelle fossero incidenti ma non perpendicolari, permetterebbero lo stesso di verificare

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova
MATEMATICA II

l'orizzontalità del piano?

P: Non è necessario che siano perpendicolari; è sufficiente che siano incidenti, ma non coincidenti. I bambini sono chiamati a dire quale delle due proposte è quella corretta ma non hanno le basi per poter dare una risposta completa dal punto di vista matematico. Per questo motivo possiamo accontentarci in un primo momento di una buona intuizione.

Chi si avvicina di più all'idea delle due rette incidenti in un punto solo?

5: Renzo si avvicina abbastanza

5: Secondo me Rosa

P: In Rosa c'è un bel termine di valore generale. Anch'essa ha un alto livello di pensiero formale. Quale parola usa? ..*due informazioni*... Renzo parla di lunghezza e larghezza, mentre Rosa parla di due informazioni collegate al discorso successivo. Hanno l'idea che ci siano due variabili rilevanti in gioco (che poi un giorno potranno essere esplicitate). Sono importanti i «germi» di idee, che vanno stimolati nonostante possano essere all'interno di un apprendimento temporaneo incompleto, piuttosto che dare informazioni precise dal punto di vista matematico che magari non vengono comprese.

Lettura dell'elaborato di STEFANIA: *«è possibile controllare se una tavoletta è orizzontale nel caso D perché in quel caso si vede se la tavoletta è inclinata nei due sensi»*

S: A livello di verbalizzazione è inferiore agli altri, a parte Ines.

P: Bisogna notare il processo di pensiero.

S: Il disegno mostra che anche se la posizione della bolla è sbagliata la bambina implicitamente ha capito.

P: Il criterio per stabilire se c'è un errore è guardare la coerenza tra la verbalizzazione e il disegno. Le inclinazioni sono coerenti con la posizione della bolla. Questo testo è molto compatto e sembra dire poco.

5: Forse voleva dire più cose

P: Bisogna interpretare quale potrebbe essere stato il ragionamento senza violarlo troppo. Sulla base degli elementi che abbiamo provate a fare una verbalizzazione più ampia e più completa per interpretare il pensiero di Stefania. Probabilmente la verbalizzazione della bambina è inferiore alla complessità del suo pensiero. Anche in questo caso sarebbe stata utile la tecnica del PRESTAMANO (nota2). Anche in questo caso abbiamo a che fare con una bambina che si trova nella *zona di sviluppo prossimale* (Vygotskij – vedi NOTA 1).

S: La bambina sembra sicura che la tavoletta sia già orizzontale.

S: Secondo me è la risposta migliore perché parla di controllo, riprende cioè il testo del problema. La bambina fa capire che nel suo pensiero ci sono le variabili di rotazione rispetto ad altri elaborati che parlavano solo di lunghezza e larghezza.

P: La conclusione della interazione verbale con la bambina è stata la spiegazione del disegno (*«sia che io alzi la tavoletta da un lato lungo la larghezza sia che io lo faccia lungo la lunghezza la bolla non è più al centro»*). Nel disegno ci sono, compresenti, le due possibilità. E così in base alla spiegazione della bambina si capisce che il disegno assume una funzione diversa dal testo che lo precede.

(NOTA ¹) *Zona di sviluppo prossimale*, in Vygotskij, è lo spazio metaforico che sta tra la soluzione autonoma completa di un problema e la soluzione con l'aiuto dell'insegnante. E' lo

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria – Università di Genova
MATEMATICA II

«spazio» in cui l'azione dell'insegnante è efficace (in quanto consente al bambino di arrivare gradualmente a fare da solo quello che inizialmente è in grado di fare solo con l'aiuto dell'insegnante).

(NOTA²)*PRESTAMANO*: l'insegnante prende l'alunno da parte e gli fa esplicitare il suo pensiero. Si dovrebbe lavorare con non più di 3 o 4 bambini di seguito, uno dopo l'altro, nel tempo di una attività individuale (circa un'ora). È un intervento che agisce sia sulla sfera affettiva sia su quella cognitiva perché stabilisce un contatto molto gratificante per il bambino se fatto con lo spirito di aiutarlo senza sottolineare negativamente l'errore.