Burton, M. B.: 1988, ‘A linguistic basis for students difficulties with algebra’, *For the learning of mathematics*, v.8, n.1, 2-7. (riassunto e traduzione)

INTRODUZIONE

Gli studenti, anche non principianti, hanno difficoltà in algebra (si pensi ai problemi espressi a parole).

Se le difficoltà dipendono dal fatto che il linguaggio algebrico è un linguaggio simbolico, perchè parlano fluentemente la madre lingua che è anch’essa simbolica. È giusto descrivere il linguaggio algebrico semplicemente come un linguaggio? E, se è un inguaggio, quali mezzi sono usati per trasmetterlo, come si presentano le sue frasi, quali mezzi si usano per trasmetterlo, come è acquisito? È veramente acquisito dal linguaggio parlato degli studenti?

Nel linguaggio algebrico ci sono componenti sintattiche e semantiche: dopo un po’ gli studenti scivolano verso la prima (uso semantic-free). Come ridare significato?

UN ESEMPIO: GENERARE FRASI ALGEBRICHE

La fabbrica CCC ha stabilimenti a Omaha e Irkutsk. Per ogni 5 prodotti fatti a Omaha, 3 sono prodotti a Irkutsk. Ogni anno 75 prodotti sono trovati diffettosi a Omaha e 325 a Irkutsk. Se si vogliono produrre almeno 800 pezzi annualmente, quante se ne devono produrre a Omaha. Riportiamo le soluzioni di 3 studenti.

- *Sol. 1*. 8000 prodotti, il rapporto di produzione è 5:3, allora 5000 a Omaha e 3000 a Irkutsk. Ma 75 sono scartati a Omaha, allora si devono produrre 3075 prodotti.
- *Sol. 2*. 5000 meno 75 fa 4925 prodotti commerciabili; 3000 meno 325 fa 3675 [errore di calcolo] da Irkutsk. 4925 + 3675 fa 8600 prodotti che sono più del necessario, allora le 5000 di Omaha sono sufficienti.
- *Sol. 3.* Il rapporto 3:5 suggerisce la prima stima - 5000 da Omaha e 300 da Irkutsk. Il rapporto di scarto, 325:75, non è lo stesso del rapporto di produzione. Tentando di “correggere’, lo studente moltiplica 5 per 75 (fa 375) e decide che Omaha deve produrre non 5000 prdotti, ma 5000+ prodotti. Lo studente si è reso conto che il metodo è scorretto, e ha dato 5375 solo comeapprossimazione grossolana.

Il primo studente ha presentato la risposta sperando che fosse corretta. Il secondo era consapevole solo del fatto che qualcosa era sbagliato poiché risultavano troppi prodotti. Il terzo era consapevole del fatto che il metodo e non solo la risposta erano sbagliati poiché dipendeva dal rapporto dei liivelli di produzione e gli scarti erano identici (che non era vero in realtà).

L’enunciato del problema è stato capito, gli studenti hanno lavorato con spirito aritmetico, ma nessuno ha tentato l’uso del linguaggio algebrico.

UN ESEMPIO: LEGGERE FRASI ALGEBRICHE

Il fenomeno inverso è l’incapacità di leggere frasi algebriche (vederle tutte intere).

Esempio: si deve valutare e controllare l’accuratezza di certe approssimazioni numeriche (integrali). Nel materiale esplicativo dato agli studenti sono chiamati *M* i limiti superiori delle derivate e dell’integrale necessari. In alcuni problemi *M* deve essere calcolato, in altri è dato. Per esempio, il valore assoluto della derivata quarta è minore del valore assoluto di un‘espressione complicata che è ≤ 488 per $0.5 \le x \le 1$. Ogni volta 8 o 10 studenti dicono che non *hanno visto* il valore numerico dell’estremo superiore loro dato. Esso non è parte del loro input visuale. Uno studente stupito ha chiesto sospettoso se 488 poteva non essere l’estremo superiore. Dice che lo ha visto solo quando è stata forzato. Dagli psicologi viene la spiegazione che la limitazione della memoria umana

> suggerisce fortemente che nello stesso momento in cui ascoltiamo una cosa detta registriamo la sua stringa di parole in qualche altra rappresentazione strutturale e che questa regitsrazione avviene molto rapidamente. La forma originale della cosa detta tipicamente è persa nel processo. (Foss & Hakes, 1978, 111)

Questi autori descrivono input scritti o orali nel linguaggio naturale, ma forse qualcosa di simile avviene con il linguaggio algebrico. Mentre legge una riga di simboli algebrici da sinistra a destra, lo studente esegue una registrazione di essi in qualche modo per immagazzinare nella memoria. Quando la complessità della stringa di simboli sopraffa il processo di registrazione, l'input visuale dello studente è fortemente bloccato.

Molti studenti hanno visto il numero, semplicemente hanno cercato un numero "migliore" per l'approssimazione. Ci sono due possibilità: una che gli studenti non reealizzino che è stato loro detto qualcosa sul numero che cercano, l'altra che in realtà essi non stiano cercando un numero.

Nel primo caso gli studenti hanno preso il significato del suggerinento come una procedura da verificare. Molti semanticisti direbbero che il significato di un enunciato dichiarativo è la sua *intensionalità*, una funzione da mondi possibili all'insieme [T, F] di valori verità.

Nel secondo caso gli studenti cercano un oggetto *M*, che non è un numero per loro. Se si chiede che cosa cercano nominano un obiettivo intermedio («un limite superiore») o l'uso che sperano di farne («calcolare l'errore»). Ma balbetano se si chiede che cos'è *M* («È solo... *M*»).

Spesso è un aiuto dire «supponiamo che i valori della derivata non siano mai maggiori di 7» senza nominare lettere.

Evidentemente dobbiamo esprimere nella lingua parlata il fatto che la derivata quarta è complicata ma non supera 488.

ESEMPI: ESPRESSIONI SENZA SIGNIFICATO

Gli studenti hanno anche difficoltà a dare significato a variabili algebriche che non sono parti di un enunciato (esempi lim...). Più l'espressione è semplice, più si nota questo problema. Qui non c'è una *x* da calcolare finché non imparano un algoritmo (Hôpital,..).

ALGEBRA COME LINGUAGGIO SEMANTIC-FREE

Gli studenti sembrano incapaci di tradurre il significato dal linguaggio naturale a quello algebrico, che è usato solo per la manipolazione; esso è vuoto avendo solo sintassi.

Gli studenti, riempendo una pagina di simboli, non pensano che stanno comunicando qualcosa. Si consideri, per esempio, quanto differiscono un foglio con il calcolo di un integrale e una lettera scritta a casa.

Gli studenti non vedono l'algebra come un linguaggio, ma nesuno chiamerebbe un sistema di simboli un linguaggio se non avesse nessuna componente semantica. Il sistema dei simboli dell'algebra è visto come un linguaggio, ma solo come

> un "linguaggio" di formule e il lavoro del matematico come quello di spiegare quali combinazioni di simboli rappresentano proposizioni vere ... [come] "$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$"...(Winograd, 1983, 12)

Possiamo immaginare questo come un linguaggio self-contained, ma possiamo esprimere con esso solo pochi enunciati interessanti, che saranno altri enunciati algebrici.

Nessun linguaggio è usato solo per manipolare le sue stesse parole. Per essere reale un linguaggio deve essere su qualcosa. Molti pensano che il sistema dei simboli algebrici sia un lingaggio di uan qualche specie e dunque permetta qualche forma di comunicazione almeno tra qualche individuo. Forse tra i matematici che si incontrano a cena?

ALGEBRA COME VARIANTE DEL LINGUAGGIO NATURALE

È ragionevole vedere il sistema dei simboli algebrici non come un linguaggio del tutto separato, ma piuttosto come un sottinsieme scritto telegraficamente del linguaggio nnaturale. Le frasi vanno intese nel linguaggio naturale, in cui le variabili vanno intese come *nomi*, anche quando denotate da lettere. La frase scritta «$i = prt$» deve essere intesa, all'interno dell'italiano, come «L'interesse è il principale moltiplicato il tasso d'interesse moltiplicato il tempo». Tuttavia lo studente il cui linguaggio algebrico è scisso dal linguaggio naturale può imparare bene solo la stringa di 5 simboli «$i = prt$».

Per vedere le difficoltà vediamo quali frasi dellinguaggio naturale hanno una traduzione in algebra. Un linguista scrive, introducendo un esempio di come i bambini acquistano il linguaggio.

> Per ogni frase dellinguaggio naturale n forma attiva con un certo tipo di verbi transitivi (che include *mangiare*, *morsicare*, *prendere*, ...etc. ma esclude *costare*, *pesare*, ...etc.) esiste una corrispondente frase in forma passiva con lo stesso verbo... (Fodor, 1966, pagina non indicata)

Questo autore non stava descrivendo un linguaggio algebrico, ma è degno di nota che i verbi esclusi nel suo esempio sono quelli che intervengono nei problemi verbali elementari. Dovremmo prendere il suggerimento; solo certi verbi intervengono in una frase italiana che abbia una traduzione algebrica.

Le frasi dellinguaggio naturale che possono diventare enunciati algebrici sono quelle che hanno a che fare con quantità. I loro nomi sono entità quantificabili. Si noti che i verbi dell'esempio *costare* e *pesare* corrispondono a *funzioni misura*. Sebbene in una frase italiana siano verbi, nella loro versione algebrica essi sarebbero tradotti come parte di un nominale, una specie di nome algebrico, piuttosto che come verbo principale. A ognuno di questi verbi italiani corrisponde una funzione misura *costo-di* e *peso-di*, cosicché le frasi «Il cappotto costa 225 dollari» e «Il cane pesa 74 libbre» sarà scritto «Il costo (del cappotto) è 225» e «Il peso (del cane) è 74».

Quando la trascrizione è completa, la frase italiana ha tutti i suoi nominali trattati in questa maniera. Una funzione misura il cui valore è un numero reale, sarà stata applicata a ognuno. E il verbo della frase italiana può funzionare come un modificatore che misura nella traduzione algebrica.

Segue che sostanzialmente ci sono due soli verbi che intervengono in una frase algebrica: *è* e *supera*. Combinazioni e arrangiamenti di questi verbi, come «minore di o uguale a» possono essere lasciati alla componente trasformazionale della grammatica algebrica.

Una volta che la frase italiana è stata codificata algebricamente, essa diventa un enunciato nel linguaggio algebrico su numeri reali. Lo studente è arivato a un'equazione che rappresenta il problema verbale. L'equazione può essere trattata con le trasformazioni sintattiche appropriate al linguaggio algebrico, che produrrà una soluzione numerica. Riguardo alle trasformazioni appropriate al linguaggio algebrico, esse sono semplicemente richiami sugli assiomi dei numeri reali.

SCRIVERE UNA FRASE IN UN LINGUAGGIO ALGEBRICO

Torniamo al problema originale. Ci sono modi linguaggio -basati per aiutare gli studenti a scrivere la frase riassunto nel linguaggio algebrico a partire dalla descrizione verbale. Se, come si è detto, il linguaggio algebrico è un sottinsieme mascherato trasparentemente del linguaggio naturale dello studente, il primo requisito della soluzione algebrica di un problema verbale è scrivere una frase riassunto (in italiano).

Gli studenti non procedono così. Essi cominciano piuttosto facendo un glossario di variabili assegnazione: «sia x =..., sia y =...». Spesso questo inizio non li porta in nessun posto. Gli studenti sono fiduciosi, perché stanno procedendo secondo le istruzioni.

Non c'è da meravigliarsi che il progresso degli studenti finisca con l'acquisizone del temporaneo lessico algebrico. Esso non dà spunti per il problema e la descrizione delle quantità con lettere ha fatto perdere la forza semantica che i nomi delle quantità hanno nel linguaggio comune.

Lo studente ha solo una lista di corrispondenze tra nominali in lingua e in simboli algebrici. Con i soli nominali in mano, lo studente non può sapere che cosa dire su di essi. In effetti manca il verbo.

> È il predicato che cambia le designazioni nominali in frasi - che permette di porre in uso il linguaggio. (Miller, 187, 85)

Finché lo studente non ha un verbo per l'enunciato del problema, il possesso di parole algebriche per tutti i nominali appropriati non può portare ad un'equazione.

Ci sono sotanzialmente due modi di ottenere un verbo per la nuova frase: il primo è inserire il verbo nella frase nel suo contesto algebrico. Lo studente deve costruire espressioni appropriate per le variabili letterali nel glossario e metterle in relazione con la forma appropriata del verbo *è* e *supera*. Questo è quello che gli autori suggeriscono quando dicono agli studenti di assegnare variabili e scrivere un'equazione.

Una maniera migliore è di assemblare prima l'intera frase in italiano. Questo ha il vantaggio di usare la propria lingua naturale per pensare sulle richieste del problema. Poi la frase viene corredata dal suo verbo. Nel secondo metodo la traduzione della frase inglese in equazione algebrica avviene pezzo per pezzo con il procedere della soluzione e si ritarda il riferimento alle variabili.

ESEMPIO: DUE INIZI DI UN PROBLEMA

Esempio di modo di iniziare un problema.

> Un portafoglio contiene 460 dollari in biglietti da 5, 10 e 20. Il numero dei biglietti da 5 supera di 4 il doppio del numero di quelli da 10, mentre il numero dei biglietti da 20 è più piccolo di 6 del numero delle monete da 10. Quanti biglietti di ogni tipo ci sono?

Per iniziare la soluzione del problema nel suo linguaggio naturale contestualizzato cominciamo con una frase in italiano (almeno telegrafico)

> I SOLDI TOTALI nel portafoglio sono 460 dollari.

La procedura successiva ha una natura spiccatamente di tipo ad albero. La frase iniziale è la radice e notiamo che contiene già il verbo. Esplicitando i nodi dell'albero cominciamo a sostituire il riferimento a SOLDI TOTALI con descrizioni più specifiche:

> VALUTA DA CINQUE + VALUTA DA DIECI + VALUTA DA VENTI = 460 DOLLARI
> $5 (DA CINQUE) + $10 (DA DIECI) + $20 (DA VENTI) = $460

Al successivo livello esplicitiamo i nodi sostituendo ai riferimenti a DA CINQUE e DA VENTI con gli equivalenti dati nel problema: DA CINQUE diventa 2(DA DIECI) + 4, mentre DA VENTI diventa DA DIECI -6.

> 5[2(DA DIECI) + 4] + 10[DA DIECI + [DA DIECI-6] = 460.

Essendo arrivati ad un livello nell'albero che mostra solo una variabile, ci fermiamo. Abbiamo un'equazione in una incognita, DA DIECI, che gli studenti saranno capaci di risolvere. A questo punto naturalmente, lo studente scrive:

> $5(2t + 4) + 10\,t + 20(t - 6) = 460$.

Non suggeriamo certo che gli studenti debbano pensare a questo processo come esplicitazione di nodi in un albero.Ma si deve notare che la procedura ha una natura top-down; che, poiché comincia con una frase italiana che ha significato l'equazione, a ogni stadio, è caricata di un signifcato semantico che vogliamo conservare; e che ogni espansione del nodo richiede una strategia di colmare vuoti lessicali che chi parla il linguaggio, anche piccoli bambini, si sa già che usano.(Clark, 1983).

Al contrrio, la tradizionale strategia di iniziare costruendo un lessico temporaneo ...

> sia x = numero dei biglietti da $5
> y = numero dei biglietti da $10
> z = numero dei biglietti da $20

è un approccio bottom-up. Procede assemblando descrizioni dei nominali del problema, elaborate quando le (side) condizioni del problema sono introdotte.

> (side) condizione: $x = 2y + 4$, $z = y - 6$.

valore del denaro in biglietti da \$5 = $5x = 5(2y + 4)$
valore del denaro in biglietti da \$10 = $10y$
valore del denaro in biglietti da \$20 = $20z = 20(y -)$

Si noti che le espressioni che rappresentano (side) condizioni si presentano come equazioni. Gli studenti possono essere deviati a "risolverle". Ma nessuna di queste mini-equazioni è l'equazione centrale cercata per risolvere il problema.

Alcuni autori cercano di evitare confusione tra equazioni che rappresentano assegnazioni di variabili, quelle che rappresentano (side) condizioni dal problema e l'equazione centrale facendo rappresentare allo studente in una tavola:

Tipo di biglietto	Numero dei biglietti	*	Valore per biglietto	+	Valorein dollari
\$5	$2y + 4$		5		$5(2y + 4)$
\$10	y		10		$10y$
\$20	$y - 6$		20		$20(y - 6)$

Questa strategia è destinata a chiarire il problema agli studenti, e qualche volta lo chiarisce, sebbene talvolta gli studenti siano deviati dall'obiettivo intermedio di riempire la tavola. Una difficoltà più seria è che scegliere una forma appropriata per la tavola richiede qualche comprensione preliminare della forma della equazione centrale cercata del problema. La mancanza di questa comprensione è stata probabilmente la difficoltà degli studenti nel primo stadio.

Sia che gli studenti usino la tavola sia che non la usino nell'approccio bottom-up di nominare dapprima tutte le quantità, si può produrre solo una più o meno accurata descrizione dei nominali del problema. Alla fine del processo preliminare lo studente non ha ancora un'equazione centrale, poiché il verbo per la fase non c'è ancora.

ORIGINI DEL LINGUAGGIO ALGEBRICO DEGLI STUDENTI

La difficoltà nell'usare in maniera sensata le variabili viene dal passaggio dalle elementari alle medie. La transizione dalla matematica generale all'algebra elementare avviene con l'acquisizione di un lingguaggio algebrico simbolico. Entrmbe le componenti (sitatica e semantica) devono essere a disposizione degli studenti. C'è un'analogia, che va presa criticamente, con l'acquisizione della prima lingua.

Il bambino acquisisce in maniera diversa il linguaggio algebrico perché si insegna una grammatica algebrica, cioè un riassunto formale e assiomatico delle proprietà delle operazioni aritmetiche.

Comunemente gli studenti prendono questo apprendimento con spirito formale. Ma la fame semantica interviene nel mezzo di un'abbondanza, perché lo studente che inizia l'algebra ha un corpus di linguaggio naturale rilevante per quello algebrico. Esso include ttutto quello che lo studente sa su numeri e quelle parti del linguaggio naturale che hanno a che fare con descrizioni qantitative.

Una cosa banale, ma importante, da notare è che il bambino acquisisce il linguaggio naturale che include il corpus originale che lo ha indotto. Possiamo similmente aspettarci che anche il linguaggio algebrico includa il suo propro corpus. Certo spesso ciò non accade. Infatti, dire che un particolare studente non può vedere significato nel linguaggio algebrico è un altro modo di dire che il linguaggio algebrico di quello studente non contiene il suo proprio corpus.

Lo studente non deve percepire il linguaggio algebrico come un linguaggio formale impoverito.