UN ESEMPIO SPERIMENTALE: SCHEDA-GUIDA DI MATEMATICA APPLICATA/SCIENZA DELLE FINANZE PER LA QUINTA CLASSE DI UN ISTITUTO TECNICO COMMERCIALE

L'attività proposta è costruita sullo spunto dell'articolo *A tale of three taxes* di Margaret Cibes pubblicato su *Mathematics Teacher, 1993, v 86, n 4* e, seppure riguardi il tema dell'imposizione fiscale negli Stati Uniti, risulta di attualità anche in Italia.

La metodologia della scheda-guida stimola lo studente alla riflessione nei quesiti presentati in forma chiusa (incorniciati a sfondo grigio) e all'esplorazione o alla ricerca personale in quelli aperti (doppia cornice a sfondo grigio). Gli insegnanti possono gestire il materiale con riferimento alla propria classe, calibrando le richieste, orientando la discussione nelle parti di *problem solving* e aiutando l'approfondimento.

Gli obiettivi generali recepiscono alcune recenti indicazioni didattiche sulla costruzione attiva della conoscenza, quali l'interdisciplinarità, la contestualizzazione dei concetti, la modellizzazione dei problemi, la comprensione critica dei grafici.

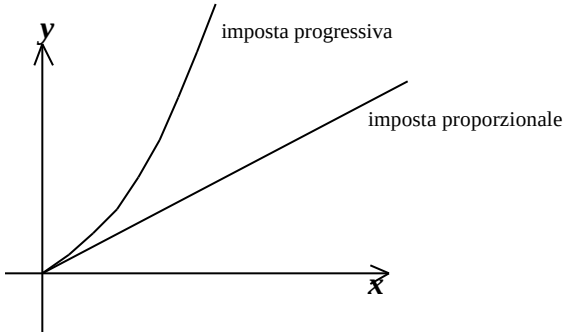
Gli obiettivi specifici e i contenuti matematici sono riferiti a diversi e fondamentali aspetti delle competenze in geometria analitica (rette, iperboli, traslazioni, intersezioni), in analisi (funzioni, derivate, asintoti) e in ricerca operativa (problemi di scelta tra alternative diverse).

Il lavoro nella classe dovrebbe essere condotto in compresenza o in collaborazione tra gli insegnanti di Matematica e di Scienza delle Finanze.

La progressività delle imposte sul reddito

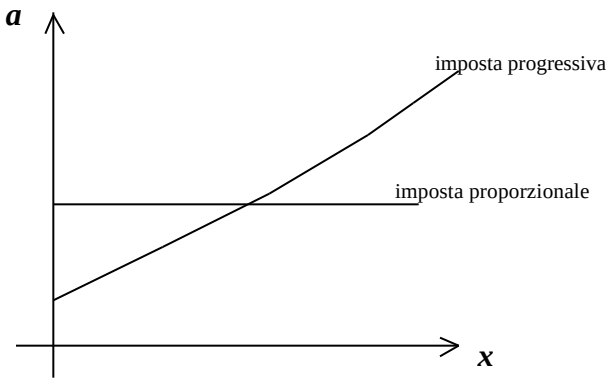
1. DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Nel corso del 1991 all'Assemblea Generale del Connecticut (U.S.A.) furono presentate diverse proposte sulla tassazione del reddito. Tutte prevedevano la cosiddetta "progressività" dell'imposta, cioè una crescita "più che proporzionale" dell'imposta ***y*** rispetto al reddito ***x***



Definizioni corrette di imposta proporzionale e progressiva si possono dare utilizzando la nozione di aliquota d'imposta ***a***, ottenuta come rapporto tra l'imposta ***y*** e il reddito ***x***.

Per l'imposta proporzionale l'aliquota $a = \frac{y}{x}$ è costante al variare di x.
Per l'imposta progressiva l'aliquota $a = \frac{y}{x}$ cresce al crescere di x.



Approfondimento di Scienza delle Finanze:
Pregi e difetti dell'imposta proporzionale.
Pregi e difetti dell'imposta progressiva.

Approfondimento di Scienza delle Finanze-Matematica:
Le diverse modalità dell'imposta progressiva e i relativi grafici cartesiani: "per detrazioni", "per scaglioni", "per classi", "continua".

Approfondimento di Matematica:
La funzione $y = x^{\alpha}, \ con \ \alpha \geq 1$*: grafico e considerazioni sulla derivata prima* $y' = \alpha \ x^{\alpha - 1} = \alpha \ \frac{y}{x}$ *in relazione all'aliquota d'imposta.*

Nella scheda analizzeremo due di questi progetti, che chiameremo A e B, e ne confronteremo le caratteristiche attraverso i grafici cartesiani.

2. PROGETTO A

i)	**I primi 25.000 dollari del reddito di una famiglia sono esenti da imposte.**
ii)	**Se il reddito eccede 25.000 dollari l'imposta è del 6% sul reddito eccedente.**

Esempi:

Il reddito della famiglia Simpsons è 30.000 dollari. A quanto ammonta l'imposta dei Simpsons?

Risposta: (30.000-25.000)x0,06=5.000x0,06=300 dollari

Il reddito della famiglia Flanders è 90.000 dollari. A quanto ammonta l'imposta dei Flanders?

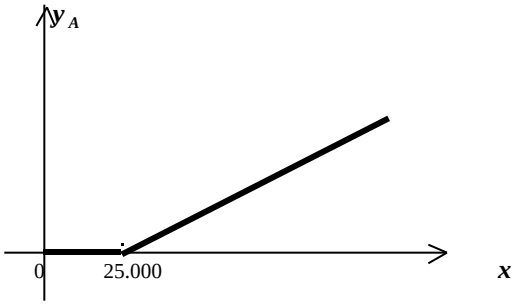
Risposta:

……
……

La definizione analitica dell'imposta y_A per il progetto A è:

$$y_A = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 25.000 \\ (x - 25.000)\ 0{,}06 & \text{se } x > 25.000 \end{cases}$$

Il grafico di y_A è il seguente



L'aliquota effettiva d'imposta a_A, calcolata come il rapporto tra l'imposta dovuta e il reddito è:

$$a_A = \frac{y_A}{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 25.000 \\ \dfrac{(x - 25.000)\ 0{,}06}{x} = 0{,}06 - \dfrac{1.500}{x} & \text{se } x > 25.000 \end{cases}$$

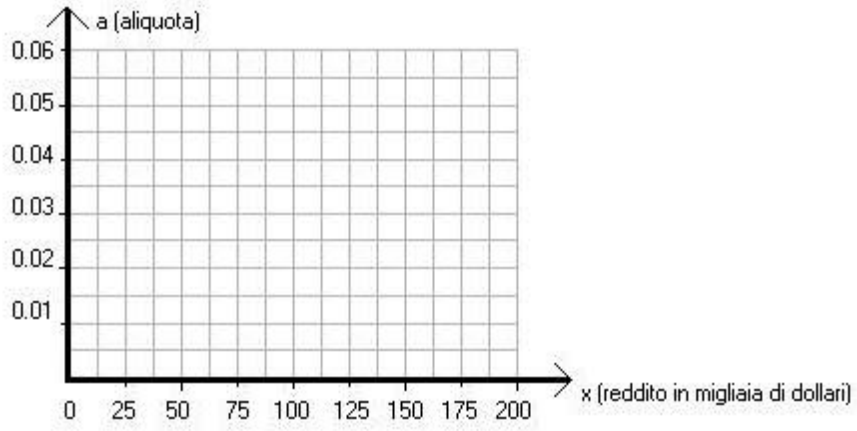
che risulta crescente al crescere del reddito.

Approfondimento di Matematica:

La funzione $y = a + \dfrac{b}{x}$*, come traslazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti*

Tabulando alcuni valori si può costruire il grafico

reddito x	aliquota a
25.000	0
30.000	
50.000	
75.000	
150.000	
200.000	



3. **PROGETTO B**

i) Se il reddito è minore o uguale a 25.000 dollari , nessuna imposta.
ii) Se il reddito è compreso tra 25.000 e 50.000 dollari l'imposta è del 4,75% sul reddito eccedente l'esenzione di 25.000 dollari.
iii) Se il reddito è compreso tra 50.000 e 100.000 l'imposta è del 4,75% sul reddito eccedente l'esenzione, ma l'esenzione viene ridotta di 1.000 dollari ogni 2.000 dollari di reddito superiore ai 50.000
iv) Se il reddito è superiore a 100.000 dollari l'imposta è del 4,75%, senza alcuna esenzione.

Esempi

A quanto ammonta l'imposta dei Simpsons?

Risposta:
……
……

A quanto ammonta l'imposta dei Flanders?

Il reddito dei Flanders (90.000 dollari) rientra nel caso iii). L'esenzione di 25.000 dollari deve essere ridotta di $\frac{90.000-50.000}{2.000}\ 1000 = \frac{90.000-50.000}{2} = 20.000$ *dollari e quindi portata a 5.000 dollari. Pertanto l'imposta dei Flanders è (90.000-5.000)x0,0475= 4.037,5 dollari.*

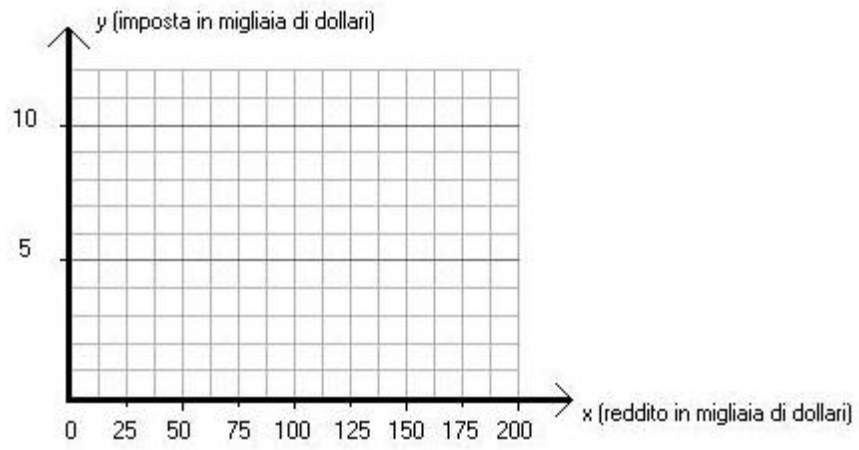
Tenendo conto che nel caso iii) l'esenzione è

$$25.000 - \frac{x-50.000}{2} = 25.000 - \frac{x}{2} + 25.000 = 50.000 - \frac{x}{2}$$

La definizione analitica dell'imposta y_B del progetto B è:

$$y_B = \begin{cases} \text{se } 0 < x \le 25.000 \\ \text{se } 25.000 < x \le 50.000 \\ \text{se } 50.000 < x \le 100.000 \\ \text{se } x > 100.000 \end{cases}$$

Il grafico di $\boldsymbol{y_B}$ è il seguente:



L'aliquota effettiva d'imposta $\boldsymbol{a_B}$, calcolata come il rapporto tra l'imposta dovuta e il reddito è:

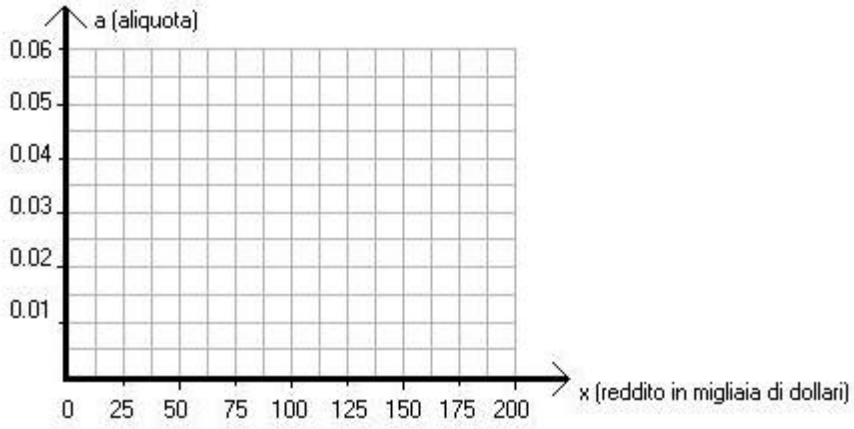
$$a_B = \begin{cases} \text{se } 0 < x \le 25.000 \\ \text{se } 25.000 < x \le 50.000 \\ \text{se } 50.000 < x \le 100.000 \\ \text{se } x > 100.000 \end{cases}$$

che risulta crescente al crescere del reddito.

Tabulando i valori seguenti

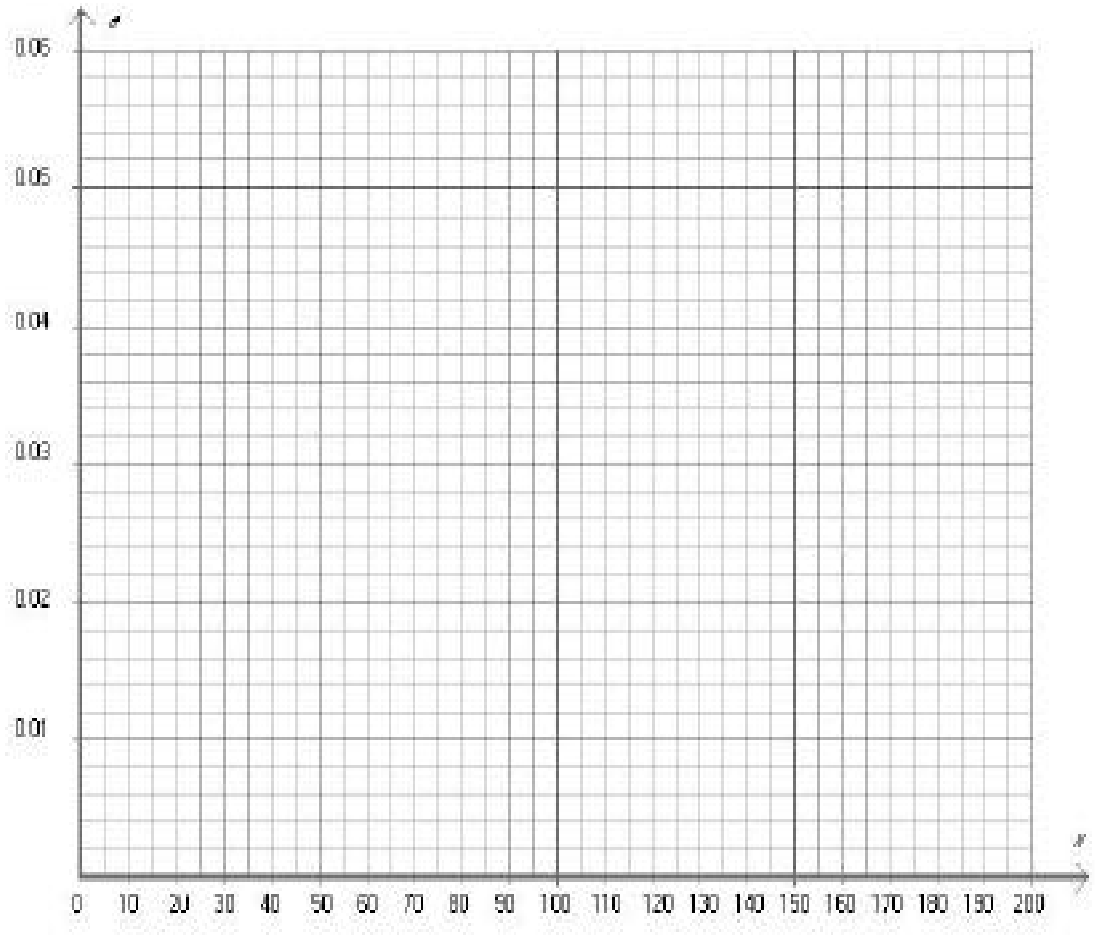
reddito x	aliquota a
25.000	0
30.000	
50.000	
75.000	
150.000	
200.000	

si ottiene il grafico



4. CONFRONTO TRA I PROGETTI

Si possono confrontare i due progetti tracciando sullo stesso grafico le curve che rappresentano le aliquote a_A e a_B. L'aliquota maggiore corrisponde ad una maggior imposizione per il contribuente.



Quali fasce di reddito sono più tassate secondo il progetto A rispetto al progetto B, ossia quali fasce di reddito sono favorite o sfavorite dai due progetti?

Approfondimento di Matematica:
Gli intervalli in cui $y_A > y_B$ ottenuti attraverso i punti di intersezione tra y_A e y_B.