7. APPROCCIO AI NUMERI DECIMALI E ALLE OPERAZIONI CON I NUMERI DECIMALI NEL SECONDO CICLO: COME DARE LA PRECEDENZA AI SIGNIFICATI E AL RAGIONAMENTO?

Teresa Gazzolo, Carmen Rubini, Circolo Didattico di Recco (GE), N.R.D. -Genova *

Premessa

Il nostro gruppo, come è noto, ha costruito una didattica che si avvale di campi di esperienza opportunamente selezionati, intesi come contesti in cui le esigenze di azione e di conoscenza giustificano e forzano (sotto la guida dell'insegnante) l'acquisizione dei contenuti disciplinari di base. Nelle attività relative ai campi di esperienza gli alunni intrecciano dichiarazioni di ragionamento con adeguate operazioni mentali e si costruiscono quindi una memoria di significati. In questa comunicazione vedremo come queste affermazioni di carattere generale si concretizzano nella costruzione del concetto di numero decimale e degli algoritmi di calcolo ad esso relativi.

7.1. Costruzione del concetto di numero decimale

L'approccio al concetto di numero decimale nella maggior parte dei libri di testo in uso nella scuola elementare italiana è sostanzialmente sganciato da significative situazioni problematiche di applicazione. Si parla di unità, quasi sempre rappresentata da una torta o da un quadrato, che divisa in dieci parti uguali dà luogo ai decimi, etc... La virgola è immediatamente introdotta per separare le unità dai decimi (fra i sussidiari consultati solo in *"Per esempio"* della Nuova Italia si trova la scrittura *"3 cm e 4 mm"*, prima dell'uso della virgola). La relazione di P.Boero in questo Convegno e, nei Convegni "Internuclei scuola elementare" precedenti, le accurate indagini statistiche illustrate dal Nucleo di Pisa e poi da quello di Padova documentano le conseguenze derivanti dall'approccio "formale" ai numeri decimali ed alle operazioni con essi. La situazione straniera non è molto migliore (cfr. Brousseau, 1980, 1981; Hart, 1981).

Con l'obiettivo di superare i limiti degli approcci correnti, noi pensiamo che sia particolarmente utile la costruzione di dinamiche mentali e significati, relativi al numero decimale, radicati operativamente dentro i campi di esperienza.Il percorso che proponiamo a grandi linee si pone l'obiettivo di <u>sviluppare la padronanza dei numeri decimali prima dell'introduzione della virgola</u> e di <u>realizzare un approccio significativo alla scrittura standard dei numeri decimali, mantenendo la padronanza del significato delle cifre oltre la virgola.</u>

Fin dalla **classe seconda** i nostri alunni misurano periodicamente le piantine seminate in classe e nell'orto, utilizzando prima le strisce di carta quadrettata e poi il righello. Essi operativamente e visivamente si rendono conto della suddivisione del centimetro in dieci piccoli "spazi" uguali fra loro, posti fra ogni "tacca lunga" e la successiva. Attraverso la soluzione di problemi del tipo: *"Di quanto è cresciuta la piantina rispetto alla settimana scorsa?"*, gli alunni usano*"e"* per dire "*3 cm e 4 mm"*, letti sul righello, e ciò consente loro di ripescare nell'esperienza extrascolastica il significato di *"parte più piccola"* che nel linguaggio comune si attribuisce in certi contesti alla *"e"* (*un intero "e" ancora una parte*). Inoltre il righello, supporto percettivo importante, permette loro di "vedere" che un millimetro è la decima parte di un centimetro, *"un decimo di..."* ; che 5 mm corrispondono a mezzo centimetro e che tutto ciò che dichiarano dopo la *"e"* vale meno dell'unità di misura prescelta sul righello. L'alunno di II risolve il problema citato sopra "per completamento", e così spesso dovrà numerare per millimetri; scavalcando l'unità di misura, egli è costretto dal vincolo dello strumento a dire: *"... 1 e 8, 1 e 9, 2 cm, 2 e 1..."*. Tutto questo è già alla portata degli alunni di II, a patto di introdurlo in modo operativo in contesti significativi.

* Comunicazione presentata agli Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994

L' U. D. "Ombre del sole" **in III** consente di utilizzare ampiamente il decametro, il metro, il decimetro, il centimetro per misurare la lunghezza delle ombre, misurazione motivata dalla necessità di soddisfare le curiosità naturalmente indotte dall'osservazione del fenomeno nelle diverse ore del giorno e nelle diverse stagioni *("quando l'ombra è più corta?", "di quanto si è allungata?").* L'uso degli strumenti consente agli alunni non solo di appropriarsi della semantica interna della dicitura *1 m "e" 5 dm "e" 5 cm* , ma anche di esercitare controlli sui risultati delle operazioni eseguite. Nella prima metà della classe terza gli alunni risolvono problemi in cui intervengono quantità decimali, eseguendo oralmente addizioni e sottrazioni, senza ancora conoscere la virgola.La soluzione di alcuni problemi esige l'arrotondamento delle misure ed induce a "vedere" e "fissare in memoria" che *"2 cm e 9 mm è quasi 3 cm, manca solo 1 mm".*
Nella misura delle ombre gli alunni vengono stimolati ad usare diverse unità di misura: *"Quante volte ci sta il righello da 30 cm? E quello da 50 cm ? E un metro? "* Ciò li induce a capire che il valore della parte dichiarata dopo la *"e"* è relativo e dipende dall'unità di misura utilizzata.
Gli alunni di III usano anche la bilancia a piatti ed il bicchiere graduato per pesare e misurare le quantità di ingredienti necessarie per una produzione, così osservano che "*4 dl è come 4 decimi di litro"* ......A questo punto (marzo della classe III) riteniamo matura l'introduzione significativa della virgola attraverso l'uso delle monete dei nonni e dei bisnonni (Unità Didattica "Storia degli ultimi 100 anni"), con esercizi di pagamento di prezzi degli anni '30. I bambini osservano in particolare che *"la moneta da 10 centesimi vale un decimo di lira, perché ce ne vogliono 10 per fare una lira"*. Lavorano sui centesimi veri, prima oralmente e poi sull'abaco delle monete (strumento che essi utilizzano sin dalla fine della classe I con le monete correnti) esteso fino ai centesimi. Vengono proposti problemi del tipo: *"Il nonno compra un chilo di fagioli che costa 2 £ e 5 centesimi e due uova a 50 centesimi l'una. Se paga con una banconota da 5 £, quanto riceve di resto?"* . Si usa l'abaco per eseguire operazioni "in colonna" con i prezzi degli anni '30.

E' chiaro che i centesimi si scrivono al secondo posto a destra dell'unità, in quanto, spiegano gli alunni (che nel primo ciclo hanno esplicitato e consolidato sull'abaco delle monete la padronanza della scrittura decimale-posizionale dei numeri naturali),*" se si scrivessero subito a destra della lira, vorrebbe dire che 10 centesimi fanno una lira ed invece ce ne vogliono 100"*. Essi, trasferendo quanto hanno appreso nel primo ciclo con l'uso delle monete correnti, capiscono che le uova ed i fagioli costano 3,05 lire, così come *"3 monete da 100 e 5 da 1 lira si scrive 305 lire".*
Si sottolinea in particolare che il grosso scoglio rappresentato dalla necessità di interporre uno
zero tra 2 m e 5 cm, uno zero di cui non si ha traccia a livello orale, viene superato facilmente attraverso il ruolo mediatore dell'abaco delle monete, che evidenzia la rappresentazione decimale-posizionale del numero e sollecita a chiedersi quante unità ci sono nelle corrispondenti colonne. In questo modo la virgola viene introdotta come segno stenografico i cui significati sono già posseduti dai bambini. In seguito le acquisizioni realizzate vengono reinvestite in altri ambiti (frazioni e S.M.D.): 20 centesimi = 1/5 di una lira ; 40 centesimi = 2/5 di una lira.
D'altra parte i bambini sono ormai pronti per scrivere che 1 km e 50 metri è come 1050 metri, o come 1,050 km; qui la quasi totalità degli alunni non omette lo 0 dopo la virgola, perché, spiegano, *"il 5 dopo la virgola vorrebbe dire 500 m e non 50 m".* A questo punto l'estensione ai decimali delle tecniche dell'addizione e della sottrazione in colonna non presenta alcuna difficoltà, in quanto il rispetto dell'incolonnamento risponde ad un'esigenza di "significato".

In IV e V si continua a lavorare su situazioni concrete per introdurre e confrontare varie rappresentazioni dei numeri razionali. Si tratta di:
* analizzare convenzioni della vita quotidiana, in cui i numeri razionali sono presenti sotto forme diverse; ad es.: sulle bottiglie di vino è scritto 0,75 (o 0.72) l, ma esse vengono spesso indicate come *" le bottiglie da tre quarti ";* la mamma ha chiesto *" un quarto di formaggio "* e la bilancia segna 250 g, mentre dicendo *" un quarto d'ora di ricreazione "* intendiamo 15 minuti; etc... ;

* scoprire e verificare corrispondenze tra le rappresentazioni decimale, frazionaria e percentuale; esempio: nell'U.D. "Climi" in V gli alunni leggono, in "Fontamara" di I. Silone, questa frase: *"Tre quarti dell'acqua andranno nel nuovo letto tracciato dal Comune e i tre quarti dell'acqua che resta continueranno a scorrere nel vecchio fosso ";* finché non provano a rappresentare graficamente la situazione e a ragionarci su, anche in termini di percentuali, per la maggior parte dei bambini (proprio come per i Fontamaresi!) la situazione non è chiara: l'uguaglianza tra le frazioni li induce a pensare a parti uguali. Nell'U.D. "Cacao", confrontando gli ingredienti di varie tavolette di cioccolato, gli alunni riflettono sull'equivalenza tra 60% e 3/5 e 0,6... ;
* ragionare sul significato della frazione come operatore o come rapporto; ad es.: per poter utilizzare una ricetta, gli alunni devono passare proporzionalmente dalle dosi date a quelle necessarie per la classe incontrando sia frazioni come "rapporti" che frazioni come "operatori" ;
* imparare a sistemare numeri decimali, frazioni e percentuali sulla linea dei numeri.

Questo lavoro in campi di esperienza adeguati, in continuità con l' esperienza extrascolastica, viene alternato a momenti di riflessione attraverso ritorni dal simbolo ai suoi significati: ad es.: nella cl. IV a fine gennaio gli alunni rispondono così alla domanda:*" 3,8 cos'è ?"* :

Lorenzo- *3,8 è un numero decimale, una misura di lunghezza; decimale vuol dire che ci sono delle cifre sotto lo zero; può essere una lunghezza, un peso, uno spessore, la capacità dell'acqua, un'ampiezza.*
Piero- *3,8 è un numero, con una virgola e poi un numero più piccolo, però sembra più grande, perché tra 8 e 3 è più alto l'8, però c'è una virgola e perciò è più grande il tre, per esempio 1,1 quell'uno che sta dietro la virgola per fare 1 prima della virgola ci sta 10 volte; ma non è sempre così, certe volte per non dire 1 e mezzo, si scrive 1,5, perché se metto un altro 1,5 viene 3,perché 1+1=2 e mezzo +mezzo=1, cioè " ,5 " x 2 fa 1 e allora 1+1+1=3. Ma " ,5 " non solo è per fare il mezzo, ma anche per le misure, per esempio 1cm e 5mm si può scrivere 1,5 cm, però nel 3,8 non c'è il 5, ma al posto del 5 c'è l'8. 3,8 è un numero decimale che sta in mezzo a 3 e 4.*

7.2. Il calcolo scritto della moltiplicazione e della divisione con i decimali

Già in IV la complessità delle situazioni problematiche reali forza gli alunni ad affrontare problemi di calcolo di moltiplicazioni e divisioni con i numeri decimali, trovando proprie strategie di calcolo, che vengono via via confrontate con quelle dei compagni e discusse, prima di approdare alla tecnica "ufficiale". Ad esempio, nell' U.D. "Sole e Terra" per riportare sul loro quaderno le ombre, gli alunni di IV devono effettuare divisioni con numeri decimali, come nel caso seguente:

"L'ombra delle 16:15 nel ventaglio di dicembre è lunga 124,2 cm, per farla stare nel quaderno devo ridurla a un quinto 124,2 : 5 =... ; il numero scomposto è 124 cm e 2 mm, allora prima divido i centimetri che sono 124, 124:5= 24 cm con resto 4 cm, che non posso usare, allora li trasformo in 40 mm, visto che avevo 2 mm, li aggiungo ai 40 e viene 42 mm, adesso li divido in 5 parti, 42 : 5 = = 8 mm con resto 2 mm, che restano. 124,2 : 5 = 24 cm e 8 mm" (Roberto)

Nei sussidiari in uso da noi analizzati ed in gran parte della pratica didattica corrente, le tecniche della moltiplicazione e della divisione tra decimali vengono direttamente introdotte attraverso "trucchi" o attraverso l'utilizzo di regole (come quella relativa alla moltiplicazione tra frazioni), o di proprietà (come la proprietà invariantiva) presentate formalmente e da accettare e applicare.Le conseguenze di questo modo di lavorare sono in parte documentate nella relazione di P. Boero.
Il nostro percorso, per quanto riguarda la tecnica della moltiplicazione, prevede (dopo esperienze di strategie "spontanee" del tipo di quella sopra illustrata per la divisione) il collegamento con il calcolo delle aree dei rettangoli con uso della carta millimetrata. Ciò permette di <u>costruire un modello significativo per la moltiplicazione tra i numeri decimali</u>, basato sul fatto,

percettivamente verificabile, che decimi per decimi dà centesimi, centesimi per decimi dà millesimi ...e così via, senza scomparsa e riapparizione più o meno "miracolosa" della virgola. Sulla carta millimetrata si vede che: 0,4 x 0,2 = 0,08; si può così gradualmente passare a scrivere 4/10 x 2/10 = 8/100.
Vediamo più nei dettagli questo itinerario, seguendo come è stato realizzato in una V.

I. A ciascun alunno viene dato un decimetro quadrato di carta millimetrata, che rappresenta l'unità, e viene chiesto di colorare su di esso in colori diversi un decimo, un centesimo, un millesimo, un decimillesimo. (Molti hanno difficoltà con il millesimo, che confondono con il decimillesimo. Se ne discute, poi ciascuno lo rappresenta con una barra da 1mm x 10 mm.).

II. Vengono eseguite individualmente moltiplicazioni tra numeri decimali, utilizzando sempre il decimetro quadrato di carta millimetrata, per trovare l'area del rettangolo che ogni volta si forma, e registrando l'operazione anche con scrittura mista. Es.:
0,5 x 0,7 = 0,35 5 decimi x 7 decimi = 35 centesimi
0,05 x 0,06 = 0,0030 5 centesimi x 6 centesimi = 30 decimillesimi

III. A questo punto si pone per iscritto la seguente domanda: *"Finora moltiplicando numeri decimali, non abbiamo trovato risultati in decimi, né in millesimi. Cerca tu moltiplicazioni che ti portino ad un risultato in decimi e/o in millesimi e spiega come hai dovuto contare dentro il rettangolo disegnato sulla carta millimetrata"* . Ecco la discussione seguita al lavoro individuale:

Maestra:- *Federico, quale è stata la prima moltiplicazione che hai tentato?*
Federico:- *Ho pensato di moltiplicare decimi per centesimi, perché se decimi per decimi fa*
centesimi, centesimi per centesimi fa decimillesimi, prendendone uno di un tipo e uno dell'altro mi doveva venire a metà, cioè mi sarebbero venuti i millesimi.
Maestra:- *E che cosa è successo con questo tentativo?*
Federico:- *Mi sono venuti fuori i millesimi.*
Maestra:- *Subito? Cioè, sulla carta millimetrata hai subito contato i millesimi?*
Federico:- *No, veramente prima ho contato i quadratini da un centimetro, come avevo fatto con le altre moltiplicazioni.*
Umberto:- *Anch'io ho ragionato come Federico, ho pensato che se decimi per decimi fa centesimi e centesimi per centesimi dà decimillesimi, doveva esserci una via di mezzo e ho provato decimi per unità e ho contato tutte le strisce da un decimo dell'unità.*
Maestra:- *Te ne sei accorto subito che dovevi contare le strisce?*
Umberto:- *No, prima non ci capivo molto, perchè contavo i quadratini e mi venivano di nuovo centesimi e ho pensato "Oh, no!!", poi mi sono ricordato delle striscioline dei millesimi fatte tempo fa.*
Massimiliano C.:- *Io sono come Federico, però ho pensato che sul nostro quadrato 1 era il massimo, perciò ho fatto 1 per un numero con i decimali e così poteva venire decimi; invece per una via di mezzo tra centesimi e decimillesimi ho pensato di moltiplicare decimi per centesimi.*
Maestra:- *Poi cosa hai contato sulla carta millimetrata?*
Massimiliano C.:- *I quadrati, perché finora avevamo sempre contato i quadrati.*
Giorgia:- *Sì, ma contando i quadrati venivano di nuovo centesimi o decimillesimi, invece bisogna contare le strisce. Per avere i decimi io ho fatto decimi per unità, poi ho contato le strisce lunghe dieci decimi.*
Maestra:- *Allora non contiamo sempre per quadrati?*
Massimiliano D.:- *No, anche rettangoli.*
Alcuni:- *Non rettangoli, strisce!*
Massimiliano D. *:- Sono rettangoli lunghi dieci quadratini!*
Maestra:- *Come mai certe volte devo contare i quadrati e altre volte le strisce?*
Massimiliano D. :- *Dipende da quanto sono grandi i numeri.*
Emanuela:- *No, perché quando si moltiplicano decimi per decimi, sono le stesse misure, sono tutti decimi, bisogna contare i quadratini, mentre quando faccio decimi per centesimi, bisogna contare le striscioline, perché ci sono misure diverse.*
Maestra:- *Ma il decimo non potevo rappresentarlo con un quadratino?*

Molti:- *Sì, si può!!*
Francesca:- *No, non si può. (piuttosto dubbiosa)*
Maestra:- *Mi fate vedere come si poteva dividere il quadrato-unità in dieci quadrati uguali?*
(Molti alla lavagna provano, sicuri di poterlo fare, ovviamente senza riuscirci.)

IV. Lavoro individuale sul quaderno: *"Prova a dividere un quadrato in 10 quadrati uguali. Si può fare?"* . Dopo il lavoro individuale, l'argomento viene così discusso dalla classe:

Manuele:- *Non si può fare, perché dopo molti tentativi non sono riuscito a dividere il quadrato in dieci quadrati uguali.*
Francesca:- *... perché l'unica possibilità è fare quadrati da 3x3, però ne vengono solo 9, se ne faccio da 2x2 ne vengono troppi, 25! Comunque il numero più vicino è sempre il 3, solo che 10 non è divisibile per 3, viene un numero infinito.*
Giorgia:- *Sicuramente non verrà mai un quadrato suddiviso in altri quadrati che stanno nel quadrato iniziale 10 volte, perché 10:3 fa 3,3333...e non si può finire, perché a questa divisione verrà sempre resto 1 che diventa 10......*
Umberto:- *Un quadrato non si può dividere in 10 quadrati,ma in 10 strisce. Questo si può spiegare con un esempio: in un quadrato con dentro 100 quadretti la decima parte è di 10 quadretti, che si possono rappresentare con una striscia larga un quadretto ed alta 10; il quadrato più grande prima di 10 è quello che ne contiene 9, troppo pochi!*
Massimiliano:- *Guardando sulla carta millimetrata, la carta è divisa in quadretti e dividere ogni quadrato di ogni misura in quadrati, al massimo si potrà dividere in 100, 10000, 1000000.... moltiplicando sempre per 100. Voglio dire che un quadrato diviso in quadrati lo si può dividere in centesimi, e da quei centesimi ne usciranno altri e così via.*
Federico:-*Eh no, perché alcuni numeri sono possibili da dividere in strisce e non in quadrati, perché la nostra numerazione è a base 10, allora devo contare strisce da 10 quadratini.*
Massimiliano:- *Ma allora ci sono dei numeri quadri e dei numeri che non sono quadri!*
(Silenzio e perplessità).
Umberto:- *Come sarebbe "numeri quadri"?*
Massimiliano:- *Numeri con cui si può fare un quadrato, come il 100, e numeri con cui non si può fare, come il 10.*
Francesca:- *Allora anche 10000 è un "numero quadro".*
Alcuni:- *Ma.... come?!?*
Giorgia:- *Sì, è vero: 3x3 è un numero quadro.*
Maestra:- *Veramente 3x3 sono due numeri.*
Alessandra:- *9 è il numero quadro, perché con 9 quadratini fai un quadrato di 3x3!*
Federico:- *Lo dicevo io che non si poteva fare, perché 3x3 è poco e 4x4 è troppo!*
Giulia:-*Allora con i numeri non quadri si possono fare solo rettangoli*
Maestra:- *Chi dice qualche altro "numero quadro"?*
Simone:- *Io avevo provato per il quadrato di 10 a mettere 5x5 e mi erano venuti 25 quadratini.... 25 è un numero quadro?*

V. Chiarito il punto nodale della parte decimale nel prodotto, si lavora a lungo su di esso, sia partendo da situazioni problematiche, che richiedono di operare con numeri decimali, sia con esercizi in progressione, sollecitando spesso gli alunni ad ipotizzare risultati possibili di determinate moltiplicazioni e/o di giustificare le loro previsioni. Ecco alcuni esempi di "consegne":

" Se moltiplico 12x0,99, verrà un numero più grande, più piccolo o uguale a 12? Perché? "

" Prima di eseguire le moltiplicazioni,scrivi quale risultato prevedi di ottenere, dopo controlla se la tua previsione era accettabile." (es.: *2,3 x 4,8 + 3,1 fa circa.....)*

VI. Ora sono gli alunni stessi a proporre possibili strategie per eseguire moltiplicazioni con più di una cifra significativa in entrambi i fattori, sia ripescando la tecnica usata fin dalla III per i numeri interi, sia ricorrendo alla rappresentazione frazionaria del numero decimale:

* tecnica della scomposizione di uno dei fattori

27,3 x 12,8=349,44

27,3 x 10=	*273*
27,3 x 2 =	*54,6*
27,3 x 0,8=	*21,84*
	349,44

*tecnica della trasformazione in frazioni decimali:

273 decimi x 128 decimi= 34944 centesimi, cioè: 349,44

VII. Anche la tecnica della divisione con numeri decimali non presenta grosse difficoltà: per la divisione nell'insieme dei naturali si usa la tecnica "canadese" (o Nuffield, o "siciliana", o "araba": vedi Ferrero, 1990) e quindi non sussiste la necessità di operare con un divisore intero; il precedente allenamento su moltiplicazioni per 0,2 ; 0,07 ; ecc ... è propedeutico (nel calcolo di 6,9:12) a ragionamenti del tipo: *..il 12 nel 6,9 non sta nemmeno una volta, vediamo quanti decimi di volte ci sta: 12 x 0,1 =1,2 è poco ....12 x 0,6 = 7,2 è troppo ...... 12 x 0,5 = 6,0 va bene .....*

Alla fine si arriva al calcolo di 73,9 : 1,8 impostato così:

73,9	1,8
72,0	1,8 x 40 = 72,0
1,9	
1,8	1,8 x 1 = 1,8
0,1	41

Riferimenti bibligrafici

AA.VV.: 1993, *Bambini, maestri, realtà* , Rapporto Tecnico, DI. MA. Università Genova

Brousseau, G.: 1980; 1981, 'Problèmes de didactique des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques*

Cannizzaro, L.: 1993, 'The many faces of numbers', *Proceedings SEMT '93*, Praha

Ferrero, E.: 1990, 'Strategie di calcolo e significati della sottrazione e della divisione tra 7 e 9 anni', *L'insegnamlento della matematica e delle scienze integrate*

Hart, K.: 1981, *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, J. Murray, London

Biggio, P.; Rondini, A.: 1988, 'Numeri razionali:...', *Quaderno T.I.D.*, n.3