La matematica nello studio della geografia

LA "MEDIA ARITMETICA".

Le schede utilizzate parlavano di "temperatura media" (nel mese di dicembre); riprendendo i dati registrati nella classe seconda con le temperature del mese di dicembre i ragazzi giungono ad affermare che "nessuna di queste temperature possiamo chiamarla <la temperatura di dicembre> perchè esse variano di giorno in giorno; dobbiamo fare come se ogni giorno abbia la stessa temperatura". Dalla discussione emerge la proposta matematica:

- sommiamo tutte le temperature che ci interessano;
- dividiamo il risultato ottenuto per il numero di temperature sommate

IL CALCOLO DELLE SUPERFICI E IL METODO DELLA TRIANGOLAZIONE

Gli scopi di questa attività, come sono emersi al termine del lavoro nella classe di cui si riporta l'iter didattico, sono sia generali nel senso che appartengono a molte delle attività che si svolgono nel Progetto (esprimere in modi diversi un ragionamento; imparare a ragionare e a risolvere problemi, migliorando le strategie di risoluzione; imparare a confrontare i metodi usati; imparare a valutare positivamente il lavoro degli altri, senza pensare subito che sia "sbagliato") che più specifici, cioè legati all'attività di calcolo delle aree di zone geografiche (imparare a collegare i ragionamenti con i disegni: che "cosa" fare e "come" farlo; imparare nuove strategie come la "compensazione"; imparare a calcolare l'area di figure dai contorni non regolari; imparare a calcolare con precisione l'area di figure geometriche già conosciute; saper misurare e disegnare con precisione e "in generale" le figure utilizzate; mettere a frutto le conoscenze che abbiamo fin qui imparato). Il calcolo della percentuale di errore è da intendere per l'insegnante come esercitazione matematica mirata alla comprensione del concetto di "errore relativo", per gli alunni come sfida con se stessi per verificare la propria capacità di conseguire un risultato il più possibile vicino alla "realtà".

ATTIVITÀ PREPARATORIA

Per procedere al calcolo delle superfici, è ovviamente necessaria un'attività preparatoria, che in parte potrebbe essere già stata svolta in IV (*cfr. Vol. IV, Materiali, pag. 222*)
Di seguito, pertanto, si documentano le tappe dell'attività preparatoria su:
- perimetro
- area
- moltiplicazioni con i numeri decimali
- il calcolo delle superfici tramite la triangolazione

All'inizio dell'anno scolastico nasce subito l'esigenza di avere dei fogli (in questo caso per disegnare i profili dell'ombra di ciscun bambino) che l'insegnante propone di ricavare da cartelloni già in possesso della classe. E' questa l'occasione per la costruzione di un "problema dall'interno" della situazione problematica (*cfr. Linee Metodologiche*) che dà inizio all'attività geometrica.
Il lavoro può essere sintetizzato nelle seguenti tappe:
a) costruzione del problema e risoluzione individuale
b) riflessione sulle strategie attuate
c) riflessione sul concetto di area
d) il dmq

a) Il problema posto dall'insegnante è il seguente: `"In classe abbiamo quattro cartelloni neri da cui ricaveremo dei fogli che ci serviranno per disegnare il profilo delle ombre di ciascuno di noi. Proponi una soluzione per ottenere i fogli dai cartelloni."`

[i cartelloni neri misurano 70x100 cm]

Da una primo esame in classe della situazione emergono gli elementi che si sono necessari per affrontare il problema:
- servono almeno 19 fogli
- i fogli devono essere grandi abbastanza per contenere la nostra faccia (grandi come un foglio da disegno)
- tutti i fogli devono essere uguali

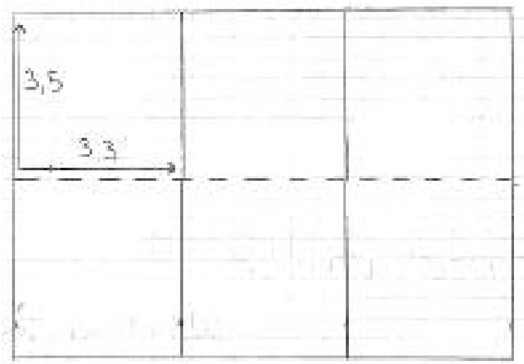
Ogni bambino procede quindi a cercare una propria risoluzione.

b) L'insegnante propone in primo luogo la riflessione sulla regola di riduzione da attuare:
Osservando le risoluzioni che avete pensato ci accorgiamo che ci sono molte possibilità per risolvere questo problema. Sceglieremo quella che ci offre la possibilità di avere fogli più grandi.
Intanto, molti hanno ridotto in scala il cartellone per poterlo disegnare: la regola è stata di trasformare 10 cm del cartellone in 1 cm nel disegno.

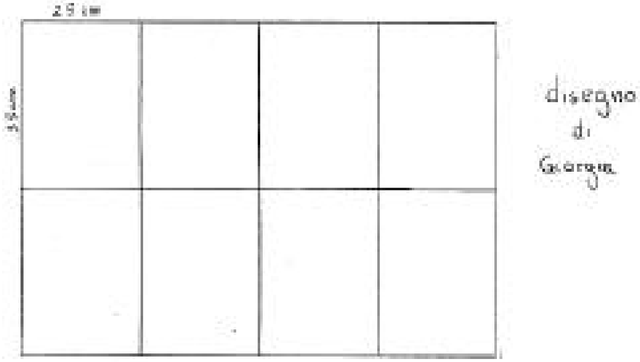
100 cm --------> 10 cm
70 cm --------> 7 cm

Quindi si procede con l' "entrare" nel ragionamento dei compagni. Prima utilizzando un ragionamento espresso correttamente

Leggi il ragionamento di Vania e prova a rappresentare con un disegno ridotto in scala 1 : 10 la sua risoluzione:
"Se io dividessi a metà il cartellone dividendo il suo lato più corto, i lati che erano 70 cm diventano 35 cm e i lati che erano lunghi 100 cm sono ancora di 100 cm. Nel lato più lungo del cartellone ci stanno tre fogli e dall'altro lato ce ne stanno due, quindi in un cartellone ce ne stanno sei."
Dopo aver fatto il disegno, scrivi le misure dei fogli che ha ottenuto Vania



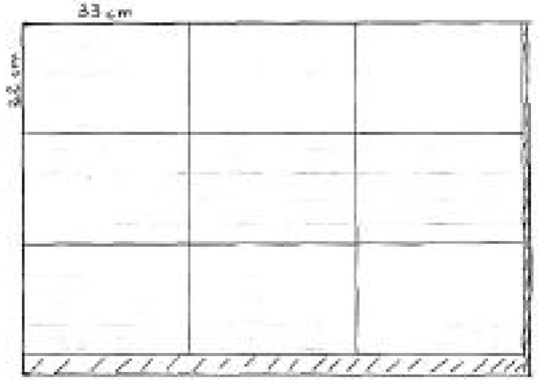
... poi lavorando solo sulle strategie espresse col disegno
Alcuni di voi hanno ragionato sul disegno e non hanno scritto con precisione il ragionamento che li ha portati alla risoluzione. Osserva i disegni di Giorgia e di Andrea e scrivi il ragionamento che secondo te hanno fatto per poter essere sicuri che il cartellone poteva essere diviso in quel modo.



Giorgia divide il lato più corto del cartellone ma non lo fa a caso: lei sa che il cartellone è 70 cm, però lo riduce in scala 1 : 10 e diventano 7 cm e la metà di 7 cm è 3,5 allora lei il cartellone lo divide all'altezza di 3,5 cm; poi però ha ancora diviso il cartellone a metà, però questa volta dal lato lungo e poi ha fatto la metà di tutte e due le parti divise; e ha ottenuto 8 fogli.

La seconda strategia (di Andrea) proposta dall'insegnante, appartiene al bambino da cui è tratta la documentazione. Si noti, nella verbalizzazione che segue, come ora il bambino riesca ad esprimere con chiarezza il proprio ragionamento.

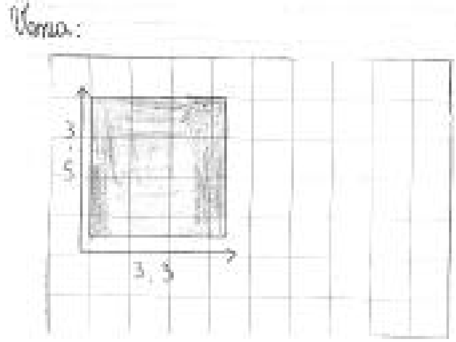
disegno di Andrea

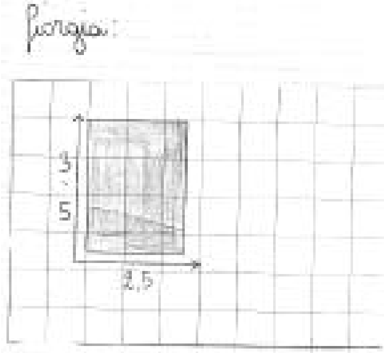


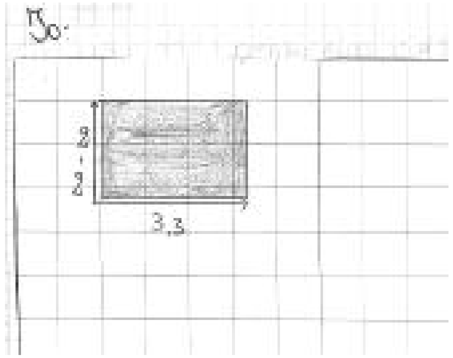
Io ho detto che un foglio da disegno è lungo 33 cm, io lo riduco in scala 1 : 10 e diventa 3,3 e idem per la larghezza $22 \xrightarrow{1:10} 2{,}2$. Siccome era ridotto anche il cartellone che ho disegnato, ho provato ad inserire i fogli e ho visto che ce ne stavano 9 ; però ne avanza una piccolissima parte, 1 cm, sul lato più lungo. Potevo fare fogli poco più grandi sul lato più corto: se mi avanzano 4 mm di foglio e ne faccio stare 3, e se in ognuno di essi ci aggiungo 1 mm, alla fine mi avanza solo 1 mm.

c) Si riprende il concetto di area (*cfr. anche la scheda n° 0, vol. IV, Materiali, pag. 222*) e si introduce il dmq.

`Riprendiamo gli esempi tratti dal problema sui cartelloni. Sulla carta quadrettata ritaglia 3 rettangoli che rappresentino il cartellone in scala 1 : 10. Su ciascuno di essi riproduci i fogli che hanno pensato di ottenere Andrea, Vania e Giorgia. Quindi colora in rosso la loro estensione.`







`Quale fra i tre fogli ha l'estensione maggiore?`

Il foglio che ha l'estensione maggiore è quello di Vania perchè abbiamo utilizzato più colore per coprirlo.

L'estensione si può anche misurare.
Ogni quadretto nel disegno, nella realtà, è un quadrato con il lato lungo un dm.

Viene così contata in modo approssimato l'estensione (area) dei 3 fogli immaginando di ricoprirli con i dmq.

Foglio di Vania: ci voglio quasi 12 dmq
Foglio di Giorgia: ci vogliono quasi 9 dmq
Mio foglio: ci vogliono circa 7 dmq e mezzo
Questa misurazione ci mostra ancora una volta che il foglio pensato da Vania ha un'area maggiore degli altri due

Si passa ad approfondire la conoscenza del dmq utilizzando un dmq su carta millimetrata e dovendo rispondere a due consegne date dall'insegnante:

`1) conta i cmq contenuti nel dmq, spiegando come fai per contarli`
`2) prova a giustificare perchè occorrono 100 dmq per`

ricoprire un metro quadrato.

d) confr Il confronto dei ragionamenti stimolati dalla seconda domanda porta ad importanti acquisizioni.

" ... so che in un m ci sono 10 dm, quindi in un mq ci sono 100 dmq perchè il m è su una linea mentre il mq è una superficie che oltre ad essere lunga è anche larga. Essendo larga 10 dm, 10 x 10 fa 100" (Lorena)

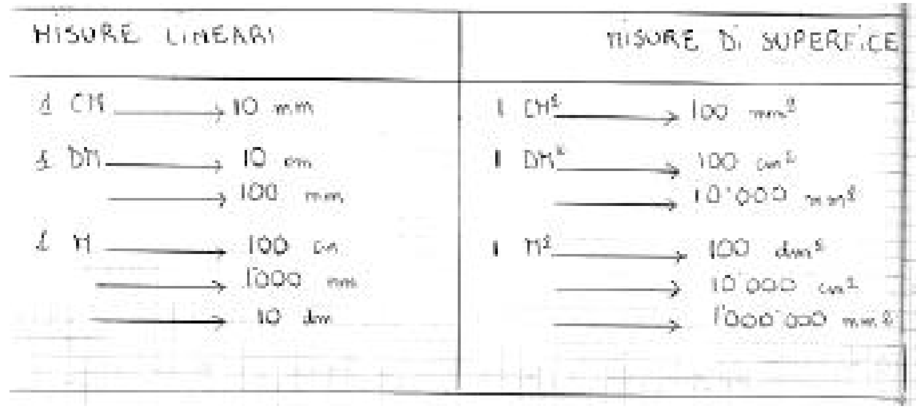
" ... si deve sapere quanti dmq ci stanno in orizzontale (e ce ne stanno 10) e poi calcoli quanti ce ne stanno in verticale (anche qui 10) e così sai che ce ne stanno 100 perchè fai 10 x 10" (Simone)

1) Sei d'accordo con i ragionamenti di Lorena e di Simone?
2) Cerca di stabilire in che cosa sono simili e in che cosa sono diversi.

Attraverso il confronto delle loro risposte, i bambini capiscono:

- l'importanza delle "dimensioni" delle superfici ("Le superfici hanno due dimensioni","Lorena parla di larghezza e di lunghezza, Simone si riferisce al lato orizzontale e al lato verticale." , "Questa è una cosa importante perchè distingue le misure delle superfici dalle misure lineari")
- l'esistenza di un rapporto di grandezza tra le misure lineari e quelle di superficie ("Una misura di superficie è 100 volte più grande della misura subito inferiore, mentre le misure lineari sono più grandi di 10 volte")

... Approdano infine ad una rappresentazione schematica che <u>non è</u> una semplice "scaletta".



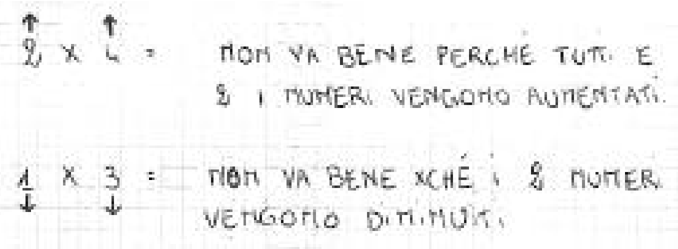
MISURE LINEARI	MISURE DI SUPERFICE
1 CM → 10 mm	1 CM² → 100 mm²
1 DM → 10 cm	1 DM² → 100 cm²
→ 100 mm	→ 10'000 mm²
1 M → 100 cm	1 M² → 100 dm²
→ 1000 mm	→ 10'000 cm²
→ 10 dm	→ 1'000'000 mm²

L'attività sul concetto di area, effettuata utilizzando le schede sulle aree (*cfr. vol. IV*), porta a costruire le strategie per effettuare le moltiplicazioni con i numeri decimali.

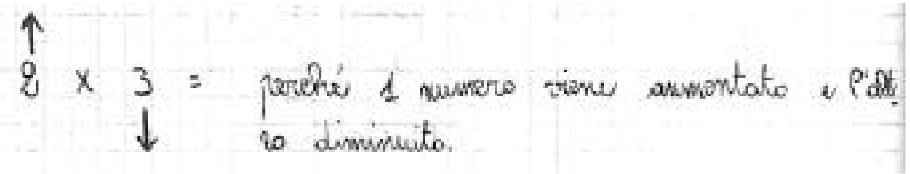
Alla base dell'attività che si documenta vi è la ricerca di un metodo "logico e significativo" di controllo del calcolo effettuato.

Durante la discussione su un problema di calcolo dell'area (Immaginiamo di calcolare l'area della dispensa nell'esercizio precedente. Le sue misure sono 1,5 cm e 3,5 cm. dobbiamo quindi eseguire il calcolo 1,5 x 3,5 =. Come possiamo fare? - *cfr. vol. IV, Materiali, scheda n° 5, pag. 224*) è emersa la possibilità di eseguire la moltiplicazione trasformando le misure dei lati in numeri interi dello stesso valore (15 mm x 35 mm = 525 mmq), oppure di eseguire la moltiplicazione con le misure in cm.

Dopo una discussione abbiamo provato a capire se il risultato era 5,25 oppure 52,5. Abbiamo provato ad approssimare il calcolo:

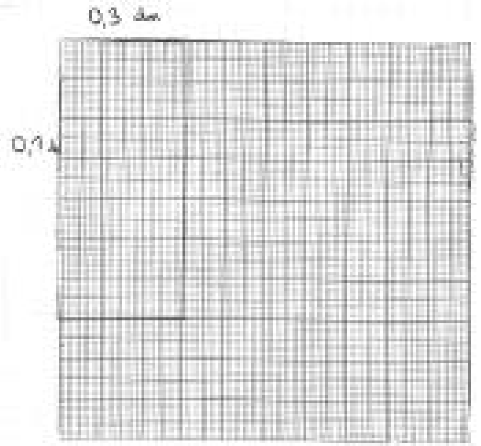


Potrebbe andare bene:



2 x 3 fa 6, quindi il risultato più vicino a 6 è 5,25.

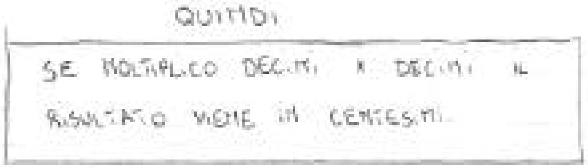
Ma i bambini si chiedono perchè "se moltiplico un numero con i decimi per un numero con i decimi il risultato dà centesimi?".



Si ragiona quindi utilizzando la carta millimetrata. Su un decimetro quadrato i bambini disegnano un rettangolo (ad es. di 0,3 dm e 0,7 dm)

0,3(dm) x 0,7(dm) = 0,21 dmq

Il risultato è quindi 21 cmq. Infatti, dato che 1 cmq è un centesimo del dmq, l'area del rettangolo ricopre 21 cmq dell'area del dmq.



Si ragiona anche sulle particolarità riscontrate dai bambini ...

... perchè la moltiplicazione fra i decimi (0,3 x 0,7) ha dato un risultato inferiore ai due fattori? (Lorena)

Abbiamo ragionato su che cosa succede quando moltiplichiamo per "1": il risultato è uguale al fattore di partenza. Quindi se moltiplichiamo per un numero superiore a "1", il risultato è maggiore dei fattori, perchè aumentiamo di un certo numero intero di volte la quantità iniziale. Se moltiplichiamo per un numero inferiore a "1", invece, il risultato è inferiore ai fattori, perchè "ripetiamo" per un numero di volte inferiore a "1", cioè meno di una volta.

"L'unità è come un confine che distingue le moltiplicazioni che ingrandiscono da quelle che diminuiscono". (Vera)

... giungendo a comprendere il limite del moltiplicare per "zero"

Il risultato è zero!

... e sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

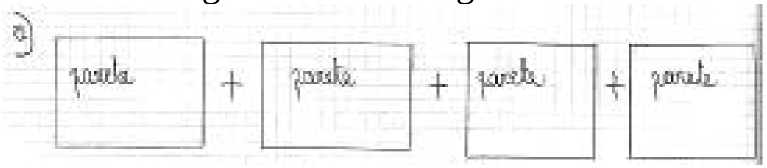
Sono state messe a confronto le due strategie utilizzate per risolvere il problema della scheda n° 7 (*cfr. Vol. IV, pag 224*):

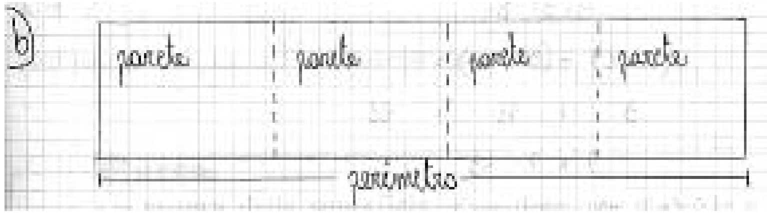
Problema: trovare la superficie delle pareti di una stanza

Strategie: a) somma delle superfici delle pareti

b) moltiplicazione del primetro della stanza per l'altezza delle pareti

Ci siamo chiesti perchè la strategie b) funziona e per capirlo abbiamo disegnato che cosa significano le due strategie.





Nella strategia b) si immagina di "aprire" la stanza e di affiancare le pareti. si ottiene un rettangolo dove l'altezza è l'altezza della stanza e la base è il perimetro della stanza, cioè la somma della lunghezza delle pareti. In questo modo il risultato finale è uguale a quello della strategia a) però ottenuto in un colpo solo.

Si è giunti così a riflessioni matematiche, sintetizzate in schede, preparate dall'insegnante e date fotocopiate agli alunni.

Si noti l'importanza, a questo punto della scuola elementare, dopo aver seguito un iter didattico basato sulla costruzione contestualizzata dei concetti, di giungere a riflessioni sui concetti e sui ragionamenti dei ragazzi.

In questo confronto abbiamo parlato di una proprietà della moltiplicazione che si chiama:

proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Nelle moltiplicazioni il risultato è identico quando moltiplico per un numero o moltiplico separatamente per le parti che formano quel numero. Non è un discorso nuovo! Di nuovo c'è soltanto il nome di questa proprietà.
Infatti, è una proprietà che avete usato molte volte nel calcolo mentale. Ad esempio, dovendo fare 23 x 12 a mente procedete così:
23 x 10 = 230
23 x 2 = 46
230 + 46 = 276
perchè avete capito che la somma dei due risultati è uguale al prodotto della moltiplicazione:
23 x 12 = 276

```
Adesso prova tu a ragionare con questa proprietà, trovando
altri esempi e procedendo in questo modo:
7 x 8 = 56
7 x 8 = 7 x (3 + 5) =
(7 x 3) + (7 x 5) =
21    +     35    = 56
```

Riassumiamo ciò che abbiamo imparato finora.

L'area

è la **misura della superficie** di una figura, cioè di ciò che si può ricoprire, colorare, ecc. Per calcolarla si usano le unità di misura di superfici (mq, cmq, dmq, ...), che hanno due dimensioni, e perciò tali unità di misura sono 100 volte più piccole o più grandi delle unità di misura inferiori o superiori.
L'area di un **rettangolo** si calcola **moltiplicando la base per l'altezza**.

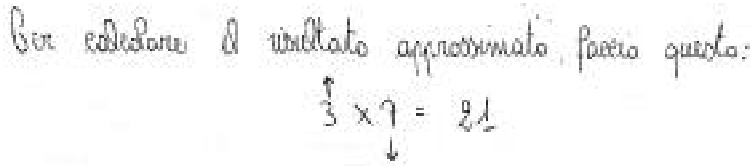
Il perimetro

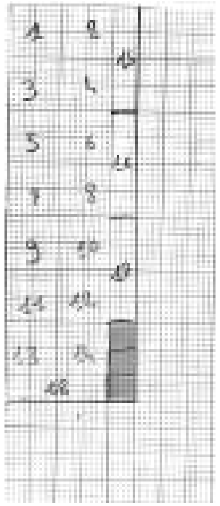
è la **misura del "contorno"** di una figura. Dato che è una misura lineare, si misura in m, cm, dm, ...: non è da confondere perciò con le misure di superficie.
Il perimetro di un **rettangolo** si calcola:
- base + altezza + base + altezza

oppure
- (base x 2) + (altezza x 2)

... sul risultato in centesimi di moltiplicazioni fra numeri che hanno cifre intere e decimi.

Si riflette sul calcolo 2,5 x 7,5 (misure in cm dei lati di un rettangolo).
L'insegnante propone prima il calcolo approssimato e la rappresentazione su carta millimetrata





Provo a rappresentarla sulla carta millimetrata

Per calcolare questa moltiplicazione abbiamo:
- contato quanti cmq ci sono (14)
- messo insieme i mezzi cmq (siamo arrivati a 18 cmq)
- contato lo spazio avanzato

Per contarlo abbiamo visto che occupa la superficie di 3/4 di cmq. Dato che i 3/4 di cmq sono 75 mmq, possiamo dire che avanzano i 75/100 di un cmq

75/100 lo possiamo scrivere in numero:

$$\frac{75}{100} = 0{,}75$$

Quindi l'area del rettangolo è 18,75 cmq
Verifichiamo con l'operazione in colonna

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \times 7{,}5 = \\ \hline 125 \\ 1750 \\ \hline 18{,}75 \end{array}$$

Prova a rifare questo ragionamento calcolando il risultato dell'operazione 3,5 x 1,5 =

IL CALCOLO DELLE SUPERFICI TRAMITE TRIANGOLAZIONE

... da uno Stato "facile" perchè abbastanza regolare come forma ....

L'insegnante consegna ad ogni alunno la fotocopia del contorno del Portogallo con la seguente consegna:

Calcola la superficie del Portogallo basandoti sulla cartina fotocopiata. Ricordati di:
- considerare prima di tutto la scala;
- avvicinarti il più possibile alla superficie reale, utilizzando le figure geometriche che conosci;
- curare la precisione delle misure e dei calcoli.

confr Allo scopo di far riflettere i ragazzi sulla strategia più economica in questa situazione l'insegnante propone il confronto delle strategie attuate nella classe. Consegna agli alunni la verbalizzazione di 6 (in questo caso) modi di risoluzione del problema con i relativi disegni, ma non abbinati ad essi.
Il confronto ha lo scopo:

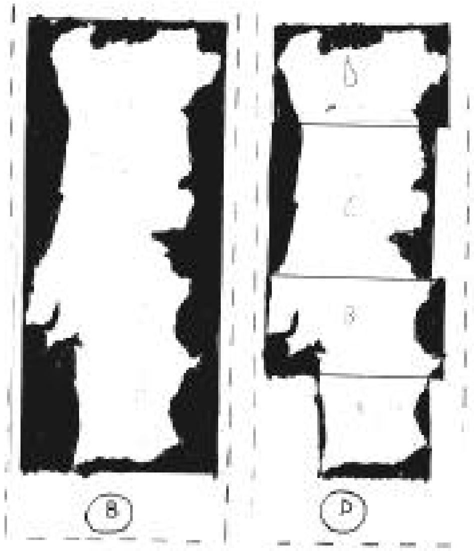
- di far comprendere la strategia adottata attraverso il confronto della verbalizzazione con la sua rappresentazione grafica ("Scrivi nello spazio a fianco la lettera che indica il disegno corrispondente al ragionamento espresso da ciascun testo. Sottolinea nei testi le parti che ti hanno permesso di riconoscere il disegno"). Con questa consegna si costringe il bambino a costruirsi, partendo dal ragionamento del compagno, una mappa mentale da confrontare con le diverse rappresentazioni grafiche

- di far riconoscere, analizzando le costruzioni realizzate, la propria strategia ("Indica qual è il disegno che rappresenta il tuo modo di risolvere il problema")

- di far riconoscere ai ragazzi, abbinando le strategie simili e facendo ricercare loro cosa esse abbiano in comune, vantaggi e svantaggi delle stesse.

La riflessione collettiva permette di costruire delle generalizzazioni tra i modi attuati:

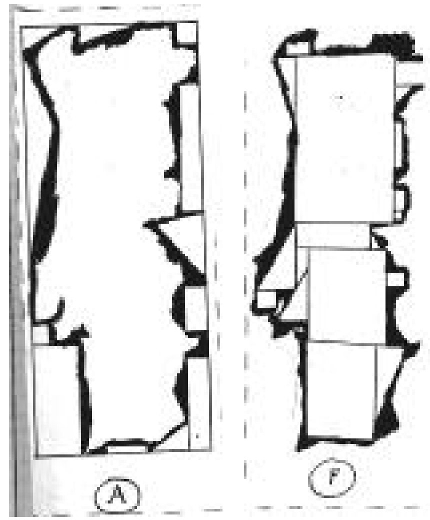
Strategie B / D



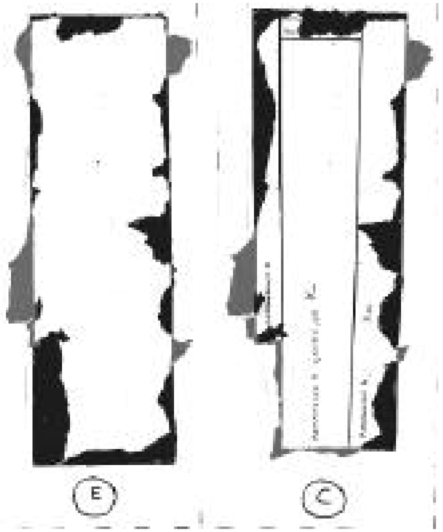
Abbiamo colorato la superficie che non appartiene al Portogallo e notiamo che c'è molto mare e molta terra che non dovrebbero esserci. Chi ha seguito queste strategie ha calcolato una superficie molto maggiore a quella realt. Rosy sostiene che un vantaggio di queste strategie è che i calcoli sono molto semplici.

Strategie A / F

Possiamo pensare che queste due strategie abbiano calcolato con più precisione delle precedenti la superficie del portogallo, perchè si sono preoccupate di avvicinarsi di più all'area vera. Anche questa volta, Rosy fa notare che i calcoli sono lunghi e complicati perchè si devono disegnare molte figure geometriche.



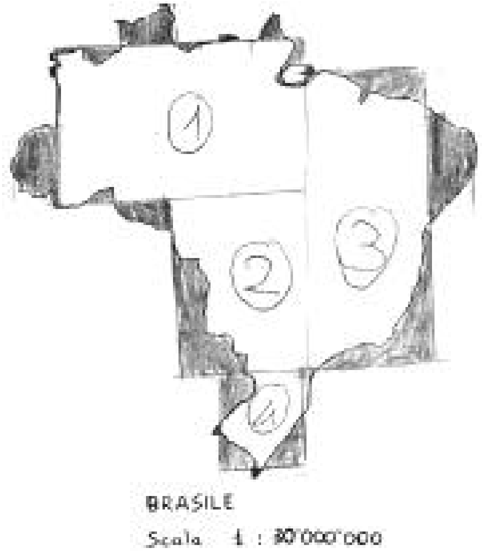
Strategie E / C



L'idea di queste strategie è diversa dalle precedenti. Esse si basano sull'idea della <u>compensazione</u>. Visto che non possiamo far coincidere la forma di uno stato con una figura geometrica, allora possiamo usare una o più figure geometriche per trovare un equilibrio fra ciò che non si può lasciar fuori (superficie rossa [più scura nel disegno]) e ciò che non i può mettere dentro (superficie blu [più chiara]). Come vediamo dai disegni, i nostri compagni hanno cercato di fare in modo che la superficie rossa fosse il più possibile simile a quella blu. Inoltre questa strategia non richiede molte figure geometriche e quindi i calcoli sono semplici.

.... ad uno Stato difficile perchè molto irregolare come forma.

Il lavoro precedente è stato propedeutico all'attività individuale su uno Stato dalla forma irregolare più complessa.
I bambini lavorano sulla fotocopia del contorno del Brasile.



Per fare queste figure geometriche ho provato a immaginare di farle stare nel Brasile, comprendendo un po' di mare e lasciando fuori un po' di terra dalle figure. Queste figure le ho fatte grandi, almeno così non ne facevo tante.

Seguono i calcoli della scala, delle superfici delle figure e la loro somma.

L'attività è proseguita con l'approfondimento delle caratteristiche del Brasile (*cfr. Materiali, pag. M2)*

<u>… per approfondire il significato della strategia di compensazione e conquistare il concetto di figure equivalenti.</u>

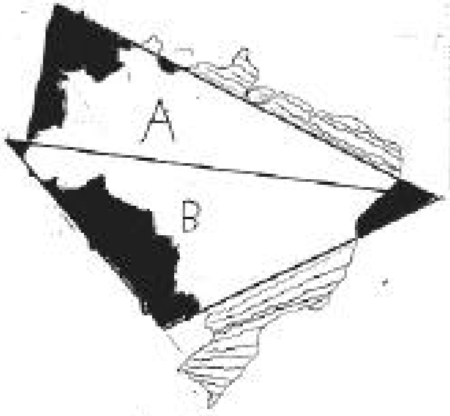
Nel calcolo della superficie del Brasile quasi tutti gli alunni hanno adottato la strategia di compensazione. L'attività però prosegue con altri importanti approfondimenti che riguardano:
a) il significato linguistico e geometrico di "compensare"
b) come si realizza la "compensazione", per giungere al concetto di figure equivalenti

a) L'insegnante propone il confronto fra sei testi che esprimono una strategia di "compensazione", con la consegna di sottolineare le parole che la esprimono. Su due di essi, che esprimono solo in apparenza tale modalità, si riflette:
"Io ho cercato di riempire quasi tutti il Brasile e di lasciare fuori un po' di terra, facendo finta che le terre che ho lasciato fuori siano mare":
questo non è compensare, perchè si toglie un po' di superficie dal Brasile senza aggiungerne altra.
"Io cerco di comprendere nei miei rettangoli la stessa superficie di mare e di terra in modo che se in un rettangolo c'è sia mare che terra, faccio finta che la terra sia mare e viceversa":
dato che la terra e il mare sono compresi nei rettangoli, non c'è compensazione!

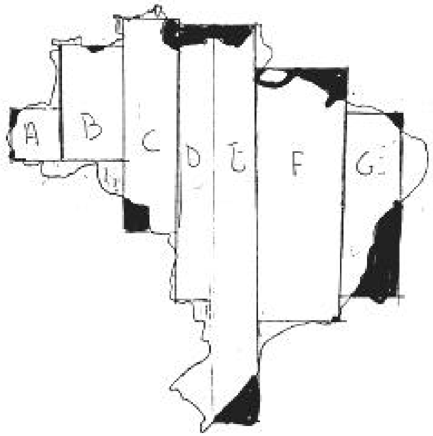
Viene quindi chiesto ai ragazzi di rappresentare con schizzi le strategie dell'attività precedente. Con questa attività si richiede una precisa comprensione del pensiero espresso nei testi.

Emerge così il significato geometrico di "compensare" come "... realizzare un equilibrio tra le zone che si tengono nella superficie e quelle scartate; cioè le zone scartate e le zone tenute devono essere equivalenti."

b) L'insegnante propone, dandole fotocopiate agli alunni, tre fra le soluzioni utilizzate nella classe per il calcolo della superficie del Brasile.



A (SIMONE)



B (GIORGIA)

La discussione in classe, seguita all'attività, è stata soprattutto su COME i compagni hanno "compensato".

Sono state notate le <u>differenze più evidenti</u> fra i tre ragionamenti (molte figure geometriche e scelta dei rettangoli in B, con conseguente maggior numero di calcoli da effettuare; differente gestione delle parti di mare).

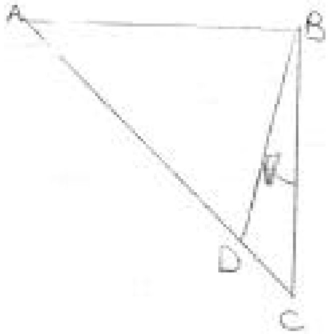
Come è stato osservato il <u>diverso modo di "compensazione</u>": Giorgia ha compensato <u>"a piccoli passi"</u>: in ogni figura cercava di accertarsi che ci fosse un equilibrio fra ciò che scartava e ciò che comprendeva. Anche Simone forse ha fatto in questo modo, ma utilizzando solo due figure. Katia, invece, ha cercato di trovare una "<u>compensazione complessiva</u>", disegnando solo un triangolo.

... e la probabilità di errore: forse Giorgia ha ottenuto una percentuale di errore molto bassa perchè con la sua strategia poteva controllare meglio la compensazione.

A proposito della strategia C, i ragazzi, chiedendosi cosa avrebbe potuto fare Katia per migliorare la sua compensazione così imprecisa, hanno affrontato le <u>caratteristiche dei triangoli e dei rettangoli</u>:

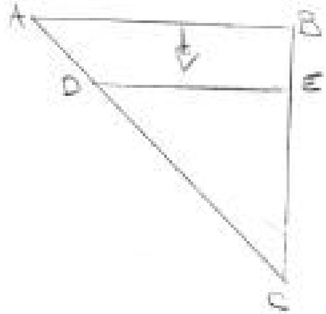
- hanno cercato di "stringere" il triangolo, facendo ruotare un lato su un vertice

ABD ha la superficie minore di ABC



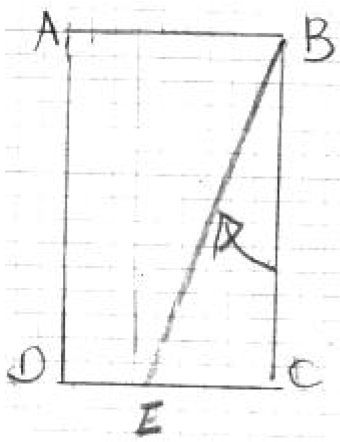
- facendo "scivolare" un lato sugli altri due, diminuendo la superficie del triangolo

CDE ha una superficie minore di ABC

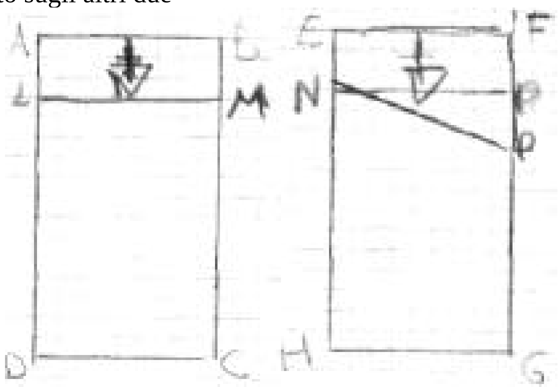


- chiedendosi se altrettanto avrebbero potuto fare con i rettangoli, sono giunti alla conclusione che "nel rettangolo non è possibile "stringere" gli angoli, verrebbe un trapezio"

ABED non è più un rettangolo: è un trapezio



mentre si può far "scivolare" un lato sugli altri due "ma solo se il lato spostato è parallelo alla posizione precedente, altrimenti risulta di nuovo una figura geometrica che non è un rettangolo"



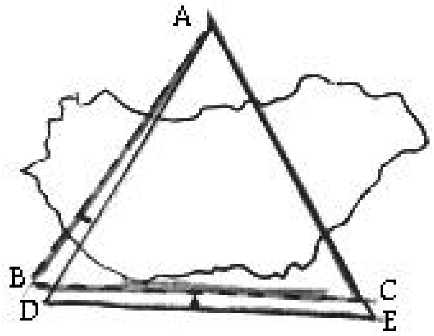
LM è parallelo ad AB: ha funzionato.

NP non è parallelo a EF: la figura si è trasformata in un trapezio.-

Sono così giunti alla conclusione che il triangolo è una figura più elastica del rettangolo ("nel triangolo gli angoli possono variare e nessun lato può essere parallelo agli altri"; "infatti è difficile disegnare un rettangolo su foglio bianco, perchè contemporaneamente deve avere tutti gli angoli retti e i lati paralleli due a due") e che scompone tutte le figure ("ogni figura che abbia lati retti può essere divisa in triangoli").

… entrando nelle dinamiche mentali per imparare a ragionare meglio.

L'esempio che viene proposto riguarda il calcolo dell'area dell'Ungheria (seguito a quello del Brasile e della Colombia). L'insegnante propone ai ragazzi, dandolo fotocopiato, il ragionamento di una compagna.



[1] "All'inizio ho fatto un triangolo con le misure a caso, pensando solo di prendere un po' di superficie "fuori" dall'Ungheria, sopra e sotto e di lasciare un po' di terra ai lati. [ABC triangolo]

[2] Poi ho cercato con l'immaginazione di mettere lo spazio che ho lascitato fuori (e che faceva parte dell'Ungheria) al posto dello spazio che ho preso e che non faceva parte dell'Ungheria.

Facendo questo mi sono accorta che il triangolo prendeva troppa terra che non faceva parte dell'Ungheria in confronto a quella che avevo lasciato fuori dal triangolo.

[3] Così ho pensato di spostare un lato in modo da restringere il triangolo e lasciare un po' meno "fuori" e un po' più di terra dell'Ungheria. Questo l'ho fatto solo su un lato del triangolo e tenendo conto solo di una parte del disegno che avevo fatto. [AD lato]

[4] Poi ho guardato lo spazio dall'altra parte e ho visto che lì prendeva troppa poca terra che non faceva parte dell'Ungheria in confronto a troppa terra dell'Ungheria che avevo lasciato fuori. Allora ho spostato il lato del triangolo in modo da allargare il "fuori". [DE lato]

[5] Dopo aver finito, ripensando a quello che avevo fatto, mi sono accorta che in pratica il triangolo che avevo fatto all'inizio era giusto lo stesso, perchè la parte che ho tolto nella prima correzione l'ho aggiunta nella seconda correzione.

[6] Però mi era più facile pensarla divisa, cioè sono riuscita a correggere il triangolo pensando a due compensazioni diverse di queste due parti. Mi sono accorta dopo che quando ho corretto ho diviso la figura in due parti: mentre lo facevo mi sembrava di tener conto di tutto insieme e no riuscivo a capire perchè col pensiero avevo diviso l'immagine. Credevo di aver fatto una cosa utile, ma il primo triangolo l'avevo fatto ad occhio, quindi non poteva essere più preciso di quello finale!"

Il testo della compagna è stato analizzato e diviso in base alle tappe di ragionamento:

[1] Mariella fa un primo tentativo

[2] Mariella controlla la compensazione e si accorge che non è equilibrata

[3] Mariella corregge una parte della compensazione restringendo il triangolo iniziale

[4] Mariella corregge l'altra parte della compensazione allargando il triangolo iniziale

[5] Mariella riflette sulle sue correzioni, guardando globalmente il risultato del suo ragionamento

[6] Mariella ricostruisce il suo ragionamento e trova i motivi per cui doveva controllare il triangolo iniziale anche se si era accorta che era simile a quello finale.

Dalla discussione di classe emergono le dinamiche fondamentali del ragionamento di Mariella:

Sono importanti le scelte che Mariella ha fatto per costruire il suo ragionamento:

- controllare il tentativo iniziale
- rendersi conto di aver fatto errori di compensazione
- apportare modifiche e correzioni

Ma emerge anche l'importanza di riflettere sul ragionamento fatto:

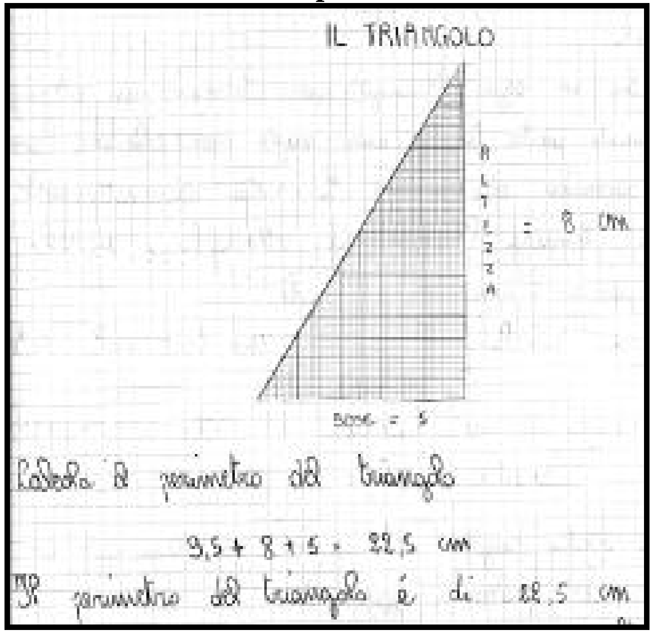
Riassumere il ragionamento permette a Mariella di aver chiaro perchè è passata dal primo triangolo al secondo e, anche dopo aver capito che erano quasi ugualmente estesi, le permette di essere convinta che era necessario verificare la prima compensazione perchè non poteva essere sicura della sua correttezza.

Si giunge quindi a capire la dinamica di un processo mentale (dal globale al particolare e viceversa) :

Ci è sembrato anche importante il fatto che, per far tutto questo, Mariella abbia ragionato vedendo prima l'Ungheria nel suo insieme e poi si sia concentrata sulle parti da compensare e infine sia ritornata a considerare globalmente l'Ungheria. Ci siamo accorti che questo passare dal generale al particolare e dal particolare al generale lo facciamo spesso: risolvendo un problema, osservando un paesaggio, ecc.

ATTIVITÀ DI RIFLESSIONE SVOLTE CONTESTUALMENTE AL CALCOLO DI SUPERFICI TRAMITE TRIANGOLAZIONE

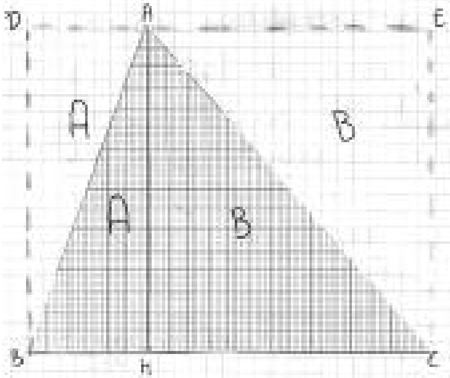
Si approfondisce la conoscenza della figura geometrica "triangolo", calcolandone il perimetro e l'area



Trova un modo per calcolare, con precisione, l'area di questo triangolo.

... verificando se la regola "(base x altezza) : 2" vale anche per triangoli diversi da quello del problema

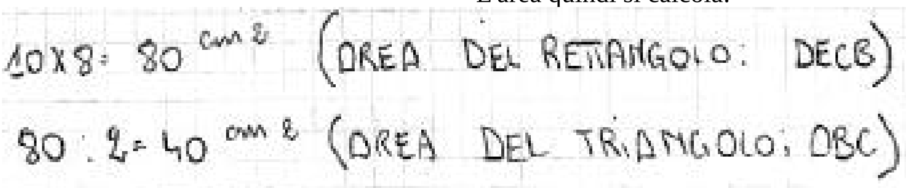
Viene prima affrontato un problema, a livello di discussione in classe ...



Anche in questo triangolo siamo riusciti a costruire un rettangolo che sia di superficie doppia del triangolo. E' di superficie doppia perchè:

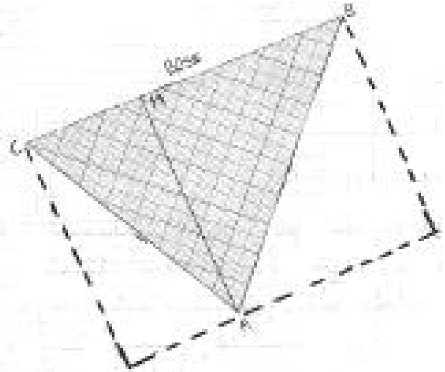
- DAB è equivalente a BAH
- AEC è equivalente a AHC

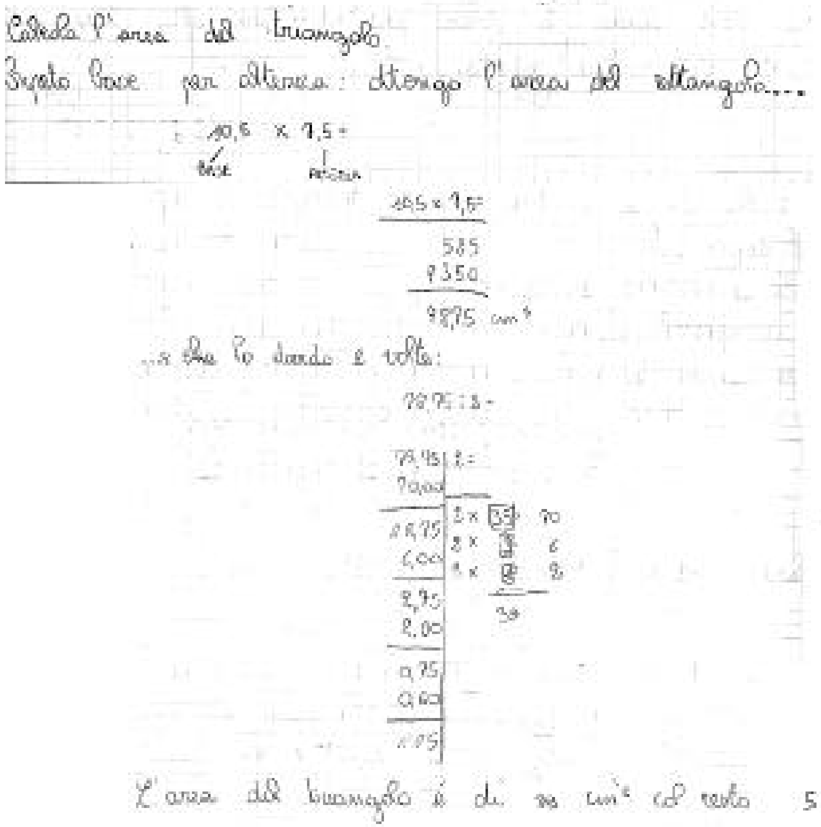
L'area quindi si calcola:



... e poi, individualmente, con lo stesso triangolo messo in un'altra posizione

E' importante che l'attività sulle figure geometriche sia condotta in modo da non creare "stereotipi" (il trangolo sempre con la base maggiore in basso, il quadrato sempre diritto, ecc.) (*vedi osservazione di Sergio*)

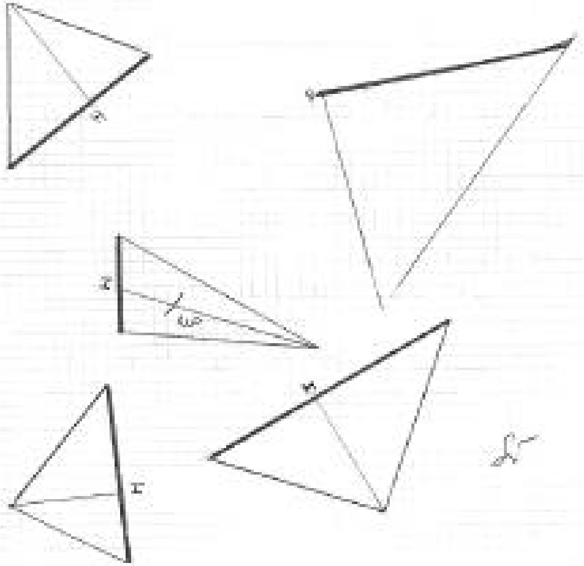




Questa attività porta, durante la discussione in classe, ad osservare il rapporto tra base ed altezza in una figura geometrica.

"Qualsiasi lato del triangolo possiamo considerarlo come "base" e l'altezza deve essere la linea perpandicolare alla base che parte dal vertice opposto" (Sergio)

Si passa quindi a fare un po' di allenamento, con la seguente consegna:



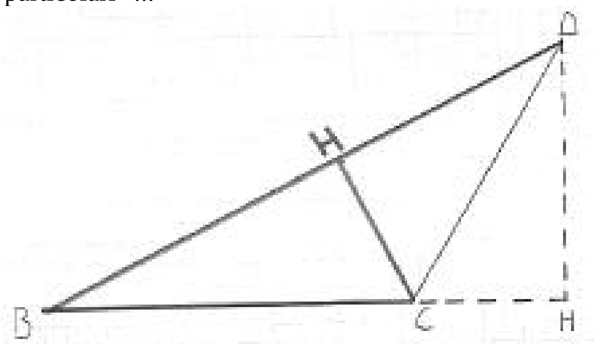
```
1) Disegna cinque triangoli in modo che nessun lato sia orizzontale;

2) In ogni triangolo scegli un lato come base e coloralo di rosso;

3) Traccia l'altezza relativa alle basi che hai scelto.
```

... e si lavora un po' su altezze "particolari" ...

Alcuni hanno disegnato triangoli con un angolo ottuso e si sono trovati davanti al problema di come tracciare l'altezza:



... trovando strategie diverse per costruire correttamente l'altezza

<u>1° possibilità:</u>

Se considero la base BC, devo prolungarla in modo da poter tracciare l'altezza dal vertice A perpendicolare alla base. Se volessi disegnare l'altezza dentro al triangolo, non potrei perchè non sarebbe perpendicolare alla base.

<u>2° possibilità:</u>

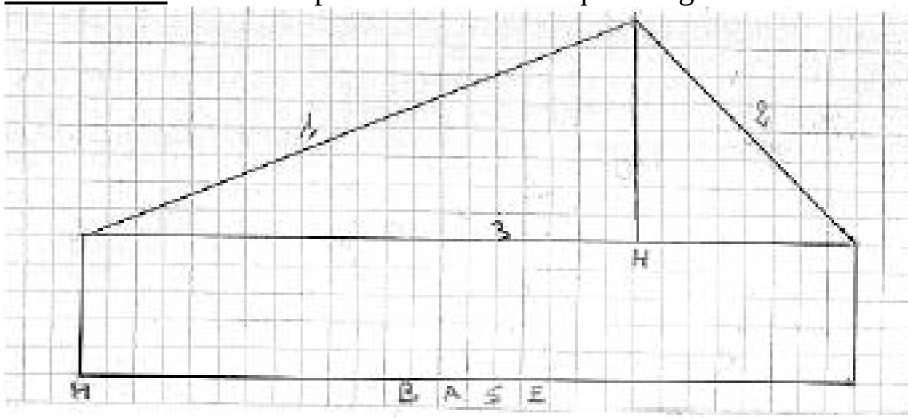
Se considero il lato AB come base, devo tracciare l'altezza dal certice C: questavolta l'altezza è dentro al triangolo.

Ci si allena anche a calcolare perimetro e area di fugure "strane" ...

Interessante è il protocollo che si riporta, in quanto in esso si vede:

- la difficoltà che si incontra a mantenere nella mente la figura intera, quando si lavora spezzandola
- l'interazione dell'insegnante che stimola il ragazzo a ritornare sui suoi passi e ad autocorreggersi.

<u>Allenamento</u>: Calcolo il perimetro e l'area di questa figura



Per prima cosa divido la figura in modo da avere un rettangolo e un triangolo, perchè nessuno riuscirebbe a calcolare l'area della figura intera!
Ora calcolo il perimetro del triangolo: (perchè?)

cm 10,7 = lato 1
cm 5,6 = lato 2
cm 14,0 = lato 3
30,3 cm

Il perimetro del triangolo é di 30,3 cm.
Ora non mi resta che calcolare l'area però prima devo disegnare l'altezza. Fatto questo moltiplico base (che sarebbe il lato n° 3) con l'altezza......
....siccome il triangolo é la metà del rettangolo, il risultato ottenuto da base moltiplicata per altezza lo divido per due:

$14 \times 4 = 56$ cm²
altezza base

L'area, la divido due volte:

$56 : 2 = 28$ cm²

CONTROLLO:

$28 \times 2 = \underline{56}$

L'area del triangolo é di 28 cm² (che dopo sommerò a quella del rettangolo)

Ora calcolo il perimetro del ~~triangolo~~ rettangolo: (perchè?)

$2,5 + 14 + 2,5 + 14 = 34$ cm

Il perimetro del rettangolo é di 34 cm
Ora calcolo l'area del rettangolo:

$14 \times 2,5 = 35$ cm²
base altezza

14 × 2,5 =
9,0
28,0
35,0 cm²

L'area del rettangolo, é di 35 cm²
Ora sommo i due perimetri in modo da avere il perimetro intero della figura: (*)

PERIMETRO del TRIANGOLO = 30,3 +
PERIMETRO del RETTANGOLO = 34,0 =
64,3

Il perimetro intero della figura, é di 64,3 cm
Ora sommo anche le due aree ottenute: il risultato sarà l'area intera della figura:

AREA del TRIANGOLO = 28 cm² +
AREA del RETTANGOLO = 35 cm² =
63 cm²

L'area della figura è di 63 cm²

Risposta

Il perimetro della figura è di 64,3 cm
L'area della figura è di 63 cm²

Il calcolo dell'area va bene.

(*) Riprova con il rosso il perimetro della figura e confrontalo con ciò che hai fatto tu.

Misuro i lati della figura e li metto insieme

cm 11,0 +
cm 5,5 +
cm 2,5 +
cm 2,5 +
cm 15,0 =
35,5

Il perimetro della figura è di 35,5 cm

... e di figure un po' più "classiche"

La scioltezza acquisita nella gestione delle figure delle regioni geografiche e insieme l'assimilazione profonda del significato dell'area e delle sue proprietà (in particolare proprietà additiva) attraverso il lavoro sulle aree delle regioni geografiche, possono essere utilizzate per questi exploit di lavoro "teorico" sulle figure geometriche che danno sicurezza all'insegnante (preoccupato del gran lavoro tecnico che si fa nell'insegnamento tradizionale sulle aree del trapezio, del rombo, ecc.) e soprattutto consentono ai bambini di sviluppare importanti competenze di risoluzione di problemi un po' più "astratti" di quelli proposti nelle classi precedenti.

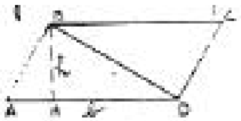
Si noti la differenza profonda rispetto all'insegnamento tradizionale più diffuso nelle scuole elementari italiane, in cui i bambini devono imparare formule e schemi di calcolo più o meno accuratamente spiegati per applicarli in modo univoco a figure assegnate.
In questo caso invece i bambini costruiscono formule e risoluzioni personali dei problemi "teorici" proposti, e le confrontano ...

In questa classe si riflette su "come si può calcolare l'area ….
(Si riportano le strategie dei ragazzi che sono state discusse in classe)

...di un parallelogramma"

$A = b \times h$

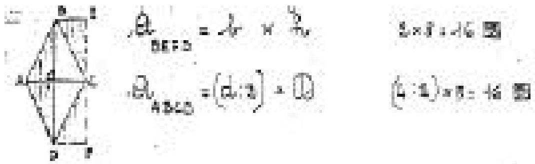
Traccio l'altezza BH e ottengo il triangolo rettangolo AHB; immagino di far scivolare questo triangolo verso destra in modo che il lato AB coincida con il lato CD, così ottengo un rettangolo equivalente al parallelogramma.
Per trovare l'area del parallelogramma moltiplico la base per l'altezza, come si fa per il rettangolo (Michele)



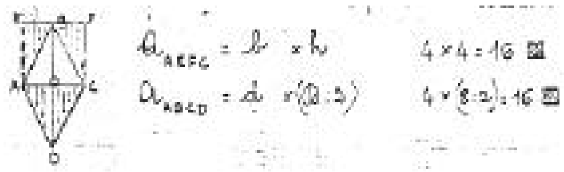
$A_{ABCD} = A_{ABD} \times 2 = [(b \times h) : 2] \times 2$

Traccio la diagonale BD e ottengo due triangoli, uguali perchè hanno tutti i lati uguali; traccio l'altezza BH relativa alla base AD, moltiplico la misura della base per quella dell'altezza e trovo la doppia area del triangolo ABD; a questo punto non divido per 2, perchè i triangoli sono uguali, così ottengo l'area del parallelogramma. (Lorenza)

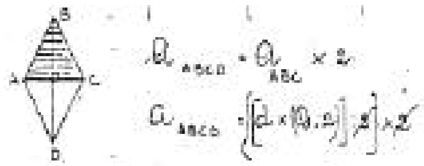
... l'area di un rombo.



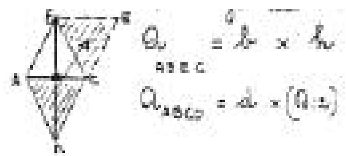
Immagino di tagliare il triangolo AOB e di sistemarlo, capovolto, vicino al triangolo BOC; di tagliare AOD e di metterlo, capovolto, vicino a COD.
Facendo in questo modo, ottengo il rettangolo BEFD, che è equivalente al rombo. trovando l'area di questo rettangolo, trovo l'area del rombo. (Chiara)



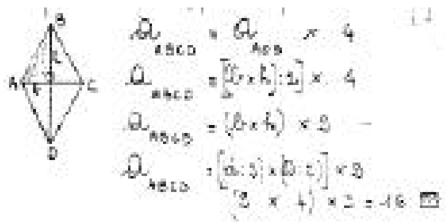
Immagino di spostare il triangolo AOD vicino al triangolo AOB in modo che il lato AD coincida con il lato AB, di mettere DOC vicino a BOC in modo che DC coincida con BC, così ottengo un rettangolo che equivale al rombo, poi trovo l'area. (Claudia)



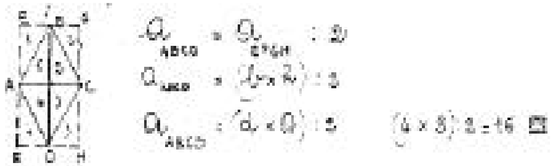
Trovo l'area del triangolo ABC e la moltiplico per 2, anzi non divido la doppia area per 2, perchè è inutile dividere per 2 e poi moltiplicare per 2. (Claudio)



Immagino di tagliare il triangolo e di metterlo vicino ad ABC in modo che BC coincida con AD e ottengo un prallelogramma che ha per base la diagonale minore del rombo e per altezza metà diagonale maggiore. (Davide A.)



Trovo l'area di un triangolino , ad es. AOB, e la moltiplico per 4, anzi dopo aver moltiplicato la base per l'altezza di un triangolino, invece di dividere per 2 e moltiplicare per 4, moltiplico la doppia area per 2. (Stefano)



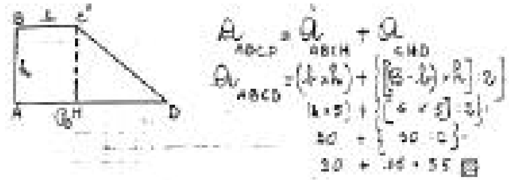
Si può disegnare un rettangolo attorno al rombo, poi trovare l'area del rettangolo e dividerla per 2, perchè l'area del rettangolo (8 triangolini) è il doppio di quella del rombo (4 triangolini). (Massimo)

Riporto AO (metà diagonale minore) vicino a OC, unisco B e D con E e ottengo il triangolo BDE, che è equivalente al rombo; trovo l'area di questo triangolo moltiplicando la diagonale maggiore, che cosidero base, per la diagonale minore, che considero altezza, e divido il prodotto per 2. (Lorenza)

Allora :

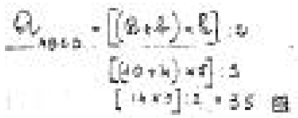
$$\mathcal{A}_{ROMBO} = \boxed{(d:2)\times D} = \boxed{d\times(D:2)} = \boxed{[(d:2)\times(D:2)]\times 2} = \boxed{(d\times D):2}$$

... l'area di un trapezio



Scompongo il trapezio in un rettangolo e un triangolo; calcolo le rispettive aree e le sommo. (Paola)

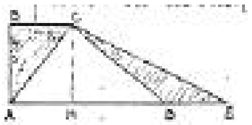
Scompongo il trapezio in due triangoli, traccio l'altezza relativa alla base AD, calcolo le rispettive aree e le sommo. (Seyla)



Siccome l'altezza è la stessa, metto insieme le basi e le moltiplico, insieme, per l'altezza, poi divido il prodotto per 2. (Lorenza)

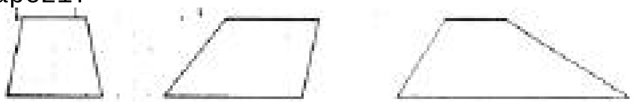
E' come se Lorenza avesse prolungato la base maggiore di un segmento lungo come la base minore. (Davide N.)

E' come se avessi costruito un solo triangolo, ACE equivalente al trapezio. (Lorenza)



Immagino di avere un altro trapezio uguale a questo, di ribaltarlo verso l'alto, poi verso destra e di sistemarlo vicino al primo trapezio in modo da ottenere un rettangolo, che è il doppio del trapezio. Trovo l'area del rettangolo e la divido per 2. (Davide N.)

I procedimenti usati da Seyla e da Davide N., traducibili nella seguente formula [(B + b) x h] : 2, valgono anche per questi trapezi?



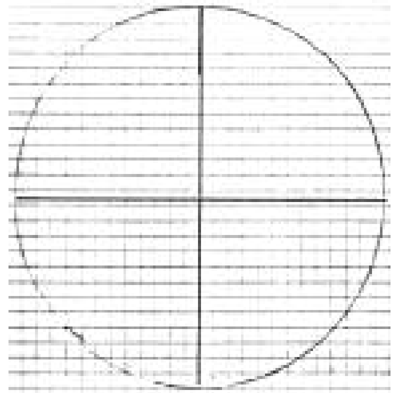
Secondo me sì, perchè il metodo della triangolazione funziona sempre, in tutti i casi. Anche il procedimento di Davide N. va bene; in questi tre casi non si ottengono rettangoli, ma parallelogrammi.

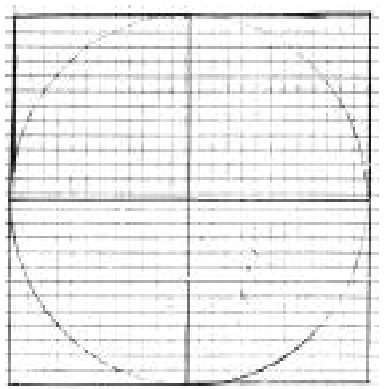
I ragionamenti dei bambini sulle figure irregolari, fatti con "compensazioni" e "riempimenti" per equilibrare il risultato della triangolazione, portano anche ad affrontare l'area del cerchio.

L'area del cerchio viene ripresa a fondo nella scuola media e negli ordini di scuola successivi; qui si riportano due approcci differenti; il primo (A) è un modo rapido di affrontare il problema nel quale però si ritrova l'abitudine dei bambini al lavoro di compensazione, ricoprimento, ecc. appreso con le attività sulla triangolazione; il secondo (B) avviene attraverso le strategie spontanee dei bambini, che poi vengono fatti "convergere" verso un particolare tipo di triangolazione (triangoli isosceli con vertice al centro del cerchio).

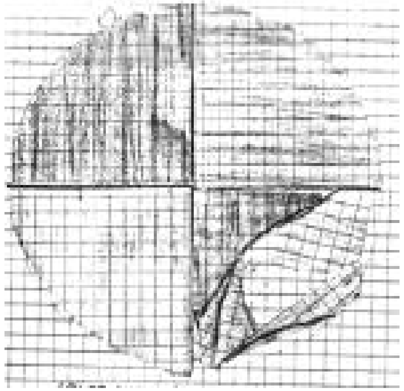
Approccio (A)

Nel cerchio tracciamo 4 raggi perpendicolari: 2 orizzontali e 2 verticali





A partire dai raggi tracciati costruiamo 4 quadrati, ciascuno dei quali ha come lato un raggio del cerchio



Coloriamo con colori diversi la superficie dei quattro quadrati ottenuti.
Ritagliamo poi le superfici di 3 quadrati e con esse ricopriamo la superficie del cerchio.
Ci accorgiamo che le superfici dei tre quadrati ricoprono quasi tutta la superficie del cerchio ad eccezione di un piccolo pezzo.
Questo pezzo corrisponde ai 14/100 del quarto quadrato.
Per trovare l'area del cerchio, si trova quindi per prima cosa l'area di un quadrato che ha come lato il raggio del cerchio, si moltiplica poi il risultato per 3,14 (3 quadrati + 14 centesimi di quadrato).

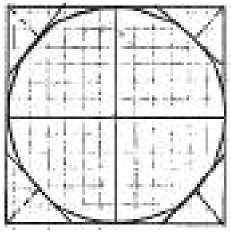
area del cerchio = (r x r) x 3,14

Nel nostro caso: (5 x 5) x 3,14 =
25 x 3,14 = 78,5 cmq

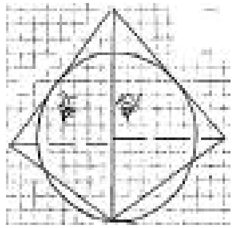
Approccio (B)

L'insegnante sintetizza in una scheda le strategie utilizzate nella classe:

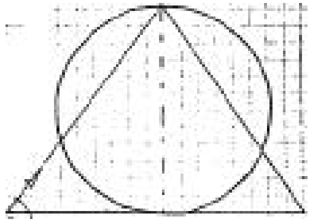
Ieri per calcolare l'area del cerchio avete cercato tante strategie. Bravissimi/e!
C'è chi tra di voi ha usato la triangolazione, cioè ha fatto così:



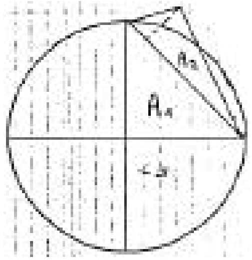
area quadrati - area triangoli
(Adriana e Nicola)



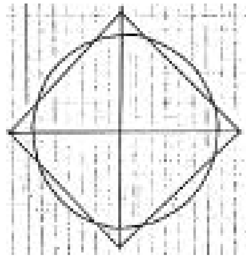
area triangolo1 + area triangolo2
(Raffaele)



area triangolo
(Chiara N., Chiara P., Roberta)



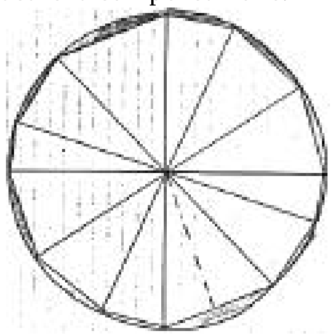
area triangolo1 + area triangolo2 x 4
(Raffaele)



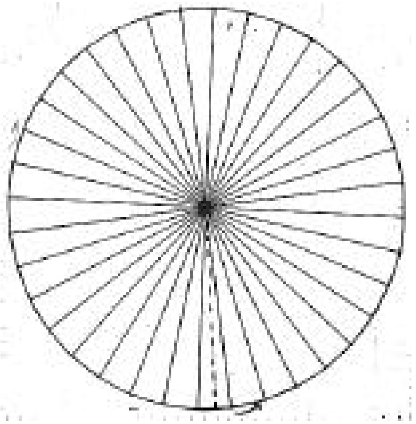
area quadrato
(Roberta)

Ma la triangolazione ci permette di trovare l'area del cerchio in modo approssimato, perchè abbiamo dovuto usare la compensazione.

Altri bambini hanno diviso il cerchio in alcuni triangoli, ma rimanevano degli spazi vuoti che non venivano considerati, quindi l'area del cerchio risultava approssimata.



(Massimo, Gianluigi, Marco, Massimiliano)



Durante la discussione che è seguita, è emersa una nuova strategia "possiamo dividere il cerchio in tantissimi triangolini in modo che gli spazi vuoti risultino inesistenti".

Dall'osservazione che "le altezze dei triangolini sono tutte uguali, invece le basi sono diverse", i ragazzi hanno proceduto al calcolo dell'area di ogni triangolino e poi le hanno sommate per ottenere l'area del cerchio. "Non possiamo calcolare l'area di un triangolo e poi moltiplicarla per 36, perchè così l'area del cerchio non sarebbe precisa. Quindi non ci rimane che calcolare l'arrea di ciascun triangolino e poi sommarle tra loro."

Sono così giunti a comprendere che "questo procedimento è molto lungo; ci conviene sommare tutte le basi dei triangolini, cioè calcolare la lunghezza della circonferenza e poi moltiplicarla per l'altezza e dividere per 2."

Confrontando circonferenze di lunghezze diverse, si è giunti a scoprire il rapporto tra raggio e circonferenza.

Abbiamo provato ad analizzare se la lunghezza della circonferenza è collegata in qualche modo alla misura del raggio. Per verificare questa ipotesi abbiamo "rettificato" la lunghezza della circonferenza del nostro cerchio, che è di cm 37,1, e abbiamo contato quante volte la misura del raggio era contenuta nella circonferenza. Abbiamo pututo notare che il raggio è contenuto nella circonferenza 6,28 volte.
Abbiamo poi verificato che la stessa cosa accade in circonferenza diverse.
Questo ci ha permesso di capire che per calcolare l'area del cerchio non abbiamo più bisogno di disegnare triangolini e neanche di usare il cordino per misurare la circonferenza, ma è sufficiente moltiplicare la misura del raggio per 6,28 volte, così troviamo la circonferenza e poi moltiplicarla per la misura del raggio e quindi dividere tutto per 2.

LA LETTURA DEI DATI STATISTICI

(vedi anche il lavoro sul "CACAO")

La tabella del confronto fra Italia e Brasile (*vedi Materiali, pag. M3*) viene analizzata, stimolando gli alunni a ragionare sui dati collegandoli tra di loro, con lo scopo di cercare informazioni sulla diversità nella vita delle persone che vivono nei due Paesi.
Dai dati che riguardano la "composizione della popolazione" gli alunni colgono la differenza storica ("la presenza di popolazioni di razze diverse ci ricorda che il Brasile è stato colonizzato nei secoli scorsi e ci sembra simile a ciò che ci ha raccontato Adriana a proposito della Colombia") e si pongono il problema dell'inserimento sociale ("Qualcuno di noi pensa che la presenza di razze diverse può indicare anche situazioni di vita diverse; ad esempio, gli Indios vivranno nello stesso modo e nelle stesse condizioni dei bianchi?").
Gli altri dati permettono interessanti collegamenti che portano a riflettere sull'utilizzo della tecnologia ("Abbiamo pensato che le condizioni dell'agricoltura richiedono più manodopera (forse l'uso delle macchine non è ancora così diffuso, perchè, come stiamo vedendo in uomini/macchine/animali, il trattore richiede meno persone). Infatti, in Italia, che ha quasi tutto il territorio agricolo coltivato, solo 7 persone su 100 lavorano in questo settore."), e sulle condizioni di vita ("Inoltre, la percentuale alta di analfabetismo ci fa pensare che quasi un quarto della popolazione non potrà cercare un lavoro qualificato (forse lavorerà soprattutto nei campi). Se poi osserviamo che il settore terziario (che comprende anche i servizi, come la scuola e la sanità) ha un numero di addetti inferiore a quello italiano, possiamo ipotizzare che esso è meno diffuso e questo potrebbe spiegare le percentuali alte di analfabeti e di mortalità infantile (che è sette volte superiore a quella italiana)."). [Ma è diseducativo suggerire che più si spende in sanità e in scuola, migliori risultati si ottengono in salute e in istruzione: l'Italia spende più di altri paesi europei in sanità, con condizioni peggiori ...]

IL CALCOLO DELLE PERCENTUALI

E' importante durante il calcolo approssimato delle aree per triangolazione, saper valutare l'errore commesso in percentuale; ciò può servire ad esempio a stabilire una fascia di approssimazione (es. la classe può stabilire di ritenere accettabile, la prima volta, una approssimazione entro il 20%, ...)

In questa classe si sta lavorando sulla Spagna; l'insegnante chiede il calcolo dell'area della Spagna, in scala 1 : 4.000.000).

L'area approssimata della Spagna è di 518.224 kmq.
L'area della Spagna nella realtà è di 492.463 kmq.
Abbiamo detto che, per questa prima triangolazione si poteva sbagliare del 20% rispetto alla superficie reale.
Troviamo per prima cosa il 20% della superficie della Spagna:
492.463 : 100 = 4924,63
4924,63 x 20 = 98492,60 kmq (il 20% della superficie della Spagna)

Troviamo adesso il numero massimo che non si poteva superare:
492463 +98492 = 590855 kmq

Troviamo adesso il numero minimo sotto al quale non si poteva scendere:
492463 - 98492 = 393971 kmq

L'attività prosegue con la registrazione di tutte le superfici approssimate trovate con la triangolazione e con la seguente attività individuale:

1) riscrivi tutte le superfici in ordine crescente
2) calcola di quanti kmq hai sbagliato con la tua

triangolazione
3) facendo i calcoli approssimati a mente scrivi chi si è avvicinato di più e chi si è avvicinato di meno alla superficie reale
4) tutti hanno rispettato i limiti del 20%?
5) che errore pensi di aver commesso nella tua triangolazione?