CAMPI SEMANTICI E COSTRUZIONE DELLA PADRONANZA DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE

Aurora Rondini, Circolo Didattico di Lavagna (GE) - N.R.D. GENOVA

1. Introduzione.

In questa comunicazione daro' per scontate:
- la nozione di "campo semantico" come "aspetto dell'esperienza umana ... che si presenta al ricercatore come unitario, non ulteriormente scomponibile, e razionalizzabile solo attraverso un uso pertinente, intenso e significativo di concetti e/o procedure disciplinari (matematiche e/o non matematiche", e di "campo di esperienza" come "un settore dell'esperienza di vita (reale o potenziale) degli allievi identificabile da essi, unitario, dotato di specifiche caratteristiche che lo rendono adatto (sotto la guida dall'insegnante) per attivita' di modellizzazione matematica, proposizione e risoluzione di problemi matematici, ecc." (come definiti da Boero - vedi report di ricerca presentato a Pisa nel maggio 1988);
- la conoscenza di come si svolge la costruzione dei concetti matematici nel progetto "Bambini maestri realta'" (vedi articolo di Boero su IMSI), in particolare basata sul lavoro sistematico in ambiti come quello delle attivita' di compra-vendita reali o simulate, o delle durate nell'arco del mese e poi dell'anno e della giornata, o dello studio delle variazioni di lunghezza nel tempo di piantine, ombre, ecc. al fine di costruire i primi, fondamentali significati del numero e delle operazioni aritmetiche.

Nella comunicazione cerchero' di dare alcuni contributi parziali all'analisi, in corso nel gruppo, di "come" e "perche'" certi "campi semantici" possono consentire praticamente a tutti i bambini di raggiungere gradualmente una padronanza delle operazioni aritmetiche sufficiente per la risoluzione autonoma dei problemi aritmetici standard ad una operazione della scuola elementare. In generale tale analisi ci pare opportuna in relazione a vari fini, quali:
- il chiarire le condizioni (in particolare concernenti la padronanza del linguaggio verbale come "strumento del pensiero") che ci sembrano preliminari o almeno da coordinare strettamente al lavoro sui problemi aritmetici
- il chiarire alcuni meccanismi che sembrano giocare un ruolo cruciale nel buon funzionamento della didattica del "campi semantici", al fine di evitare che nell'adozione delle nostre impostazioni didattiche da parte degli insegnanti esterni al gruppo si trascurino proprio gli aspetti piu' significativi del nostro lavoro
- l'aumentare la produttivita' del lavoro con i bambini che presentano maggiori difficolta' di apprendimento (concentrando lo sforzo nelle direzioni piu' importanti ai fini dello sviluppo delle loro competenze aritmetiche).

Scopo di questa comunicazione e' quello di esplorare (attraverso esempi di comportamenti "esterni" dei bambini e analisi "introspettive") alcuni, possibili apporti del lavoro nei "campi di esperienza" al fine di costruire competenze che hanno a che fare direttamente (attraverso la costruzione dei significati) o indirettamente (attraverso l'elaborazione delle strategie di calcolo, i "teoremi in atto", ecc.) con la padronanza delle operazioni aritmetiche nella risoluzione dei "problemi verbali".

2. Importanza del campo di esperienza nella costruzione dei significati che intervengono nelle strategie risolutive dei problemi aritmetici.

La ricerca, e anche la pratica didattica corrente degli insegnanti, suggeriscono che alcune operazioni matematiche "vengano spontaneamente quasi da se'" senza forte intervento culturale, mentre altre operazioni (sottrazione, quanto mi resta, alcuni significati della moltiplicazione -area; spazio, conoscendo velocita' e tempo- i significati della divisione) abbiano bisogno di esperienze culturali con le quali arrivare alla costruzione cosciente di modelli matematici. Ci sembra (come verra' argomentato in seguito) che il campo semantico, intervenendo con una opportuna gestione da parte dell'insegnante nel creare la padronanza dei fatti culturali, possa facilitare da parte dei ragazzi una elaborazione di personali strategie risolutive nelle quali si costruiscono e si chiariscono via via i significati delle operazioni aritmetiche.

Per risolvere un problema di organizzazione del proprio tempo del tipo "vivo a Lavagna, al mattino devo essere a scuola, al pomeriggio devo andare a Milano e poi a Torino e alle 21 devo essere di ritorno a casa.", l'adulto fa riferimento alla sua esperienza di distanze percorribili in un certo tempo, e procede alla costruzione del "progetto" della giornata proiettandosi in avanti e all'indietro e attuando dei controlli per verificarne la fattibilita'. Un bambino o una persona non abituata a viaggiare troverebbero notevoli ostacoli dovuti al fatto che non avrebbero il dominio della situazione. Mi sembra, infatti, che sia proprio l'esperienza a permettere di "dominare" quel tempo fornendo la certezza (pur ammettendo possibili ritardi e contrattempi) di conoscere che cosa esso voglia dire e di che cosa esso sia costituito. Quando penso, infatti, che per andare a Milano impiego 2 ore, "vedo" scorrere la strada e i caselli: quel tempo e' un qualcosa che "riempio" di un vissuto. Cio' mi permette di accettare (psicologicamente) la sfida a "manipolare" il tempo, perche' so cio' che in esso posso "spostare" e cio' che invece e' fisso (posso eventualmente spostare l'appuntamento o l'orario di partenza, ma non posso impiegare un'ora di viaggio per andare da Lavagna a Milano, dato il presupposto che viaggio con un'automobile di media cilindrata!).

Cosi' il bambino che in II elementare risolve un problema moltiplicativo facendo riferimento, nella sua verbalizzazione, a un ipotetico dialogo che puo' essere avvenuto nel negozio, approda alla risoluzione grazie al fatto che puo' "appoggiare" l'evolversi del proprio pensiero ad una pratica corrente di acquisti reali.

Nello stesso modo, Francesco, alunno di III, nell'affrontare la situazione problematica in cui deve proporre (nel campo di esperienza della "storia della famiglia") una strategia per riportare, su una striscia di carta, i 54 anni della vita di un nonno intervistato dalla classe in modo che ogni anno abbia a disposizione uno "spazio" uguale, fa riferimento alle esperienze precedenti che gli hanno permesso di "calarsi" in questa situazione e quindi di avere presente cosa succede nella realta' fino ad arrivare ad interagire mentalmente con essa.

> "Si prende un cartellone, lo facciamo di 25 cm. Con il righello da 50 misuri il cartellone. Deve essere lungo 25 cm, se e' piu' lungo fai una sbarra a 25 cm, se invece e' piu' corto aggiungi un altro cartellone. In tutto i cartelloni devono essere 54 e lunghi 25 cm l'uno. Poi scrivi gli anni: 1935, 1936, e arrivi fino a 1988. Pero' se e' piu' grande provi con un'altra misura piu' bassa, oppure se avanza lo spazio aggiungi delle parti uguali alla base piu' lunghi." (Intervento dell'insegnante sul testo di Francesco: "Non si capisce, spiega meglio") "Se avanza dello spazio lo misuri e lo dividi in 54 parti uguali e ne aggiungi un pezzo ad ogni cartellone"

Dalla verbalizzazione della sua strategia risolutiva si puo' notare che:

- Francesco, nel passare dalla forma impersonale "si prende un cartellone" all'indicativo presente "lo facciamo di 25 cm", progetta un'esperienza che egli riesce a dominare e che gli permette di essere soggetto attivo e cosciente nella risoluzione.
- l'aver fatto esperienze (la linea del tempo di classe II e la manipolazione del materiale) lo porta all'attivazione di un algoritmo risolutivo basato sulla produzione e verifica di ipotesi euristiche.
- il trasferire a livello culturale e consapevole , sotto richiesta dell'insegnante, un fatto di esperienza che avrebbe avuto scarso valore ai fini dell'apprendimento finche' fosse rimasto a livello manipolativo (non si e' limitato a constatare che il cartellone puo' essere piu' lungo o piu' corto di 25 cm, ma su di esso e' intervenuto adattandolo alle esigenze della situazione) gli ha permesso di mettere in relazione la "contenenza" con la "partizione" ("se avanza dello spazio lo misuri e lo dividi in 54 parti uguali e ne aggiungi un pezzo ad ogni cartellone").

Altri esempi significativi si hanno con problemi piu' complessi: nel problema (citato nella relazione di E. Scaii) relativo al costo dell'impianto di un bulbo (bulbo + vaso + quota/parte del terriccio) le operazioni fisiche effettuate per "confezionare" i vasi sembrano suggerire strategie di risoluzione nelle quali si coordinano bene in molti bambini (8 anni di eta'!) le operazioni di "addizione" e "divisione".
D'altra parte, anche altri esempi citati nella stessa relazione evidenziano come l'evocazione di operazioni consuete sugli "oggetti" di cui si parla nel testo del problema suggerisce opportune attivita' con i dati numerici contenuti in esso ("riempimento" o "svuotamento" di un flacone a cucchiaiate, e iterazione dell'addizione del costo di un cucchiaio, nell'approccio alla divisione di partizione come operazione inversa della moltiplicazione, ecc.).
La contestualizzazione di questi problemi consente ai bambini (anche a quelli che presentano le maggiori difficolta' di apprendimento) di avere <u>immediatamente</u> presenti le operazioni fisiche a cui il testo del problema fa piu' o meno direttamente riferimento; cosi' si <u>attivano processi di pensiero</u> che consentono ai bambini di "crescere" intellettualmente.

3. Analisi di situazioni problematiche di sottrazione: importanza di altri fattori riconducibili ai campi semantici.

Dall'esame di situazioni problematiche relative a modelli matematici di sottrazione, mi sembra si possano ravvisare, oltre all'importanza della contestualizzazione della situazione problematica in campi di esperienza, almeno altri due elementi quali:
- l'influenza del campo di esperienza dei numeri;
- la capacita' di articolare comparazioni e ragionamenti di contemporaneita' intrecciati alla produzione e gestione di ipotesi funzionali alla risoluzione del problema.

3.1. Analizziamo ad esempio due semplici problemi di inizio classe II: "ho 5000 lire, ne spendo 2000, quanto mi resta?"
"Ho 5000, ne spendo 1850, quanto mi resta?"
Nel primo caso i dati numerici sono tali per cui generalmente non viene elaborata alcuna strategia: e' quasi il ricorso alla memoria "visiva" che permette di trovare l'elemento incognito 3 ("3000").
Nel secondo caso l'elaborazione di una strategia di calcolo procede nei bambini attraverso la conta delle monete: (1850 1900 2000 5000; oppure 1850 2000 5000). Alla base di queste strategie di calcolo pero' mi sembra ci sia un ragionamento piu' complesso che prevede il confronto fra 1850 e 5000, lo stabilire che 1850 e' piu' piccolo di 5000 e pertanto "se e' piu' piccolo vuol dire che sono soldi in piu' che avro' di resto", quindi il procedere con il calcolo numerico attuando lo stesso tipo di ragionamento nel quale l'esperienza con i numeri ha una forte influenza.
Infatti, schematizzando questo ragionamento, mi pare di poter ravvisare la formulazione di un ragionamento ipotetico che nasce dal confronto tra dati numerici (campo di esperienza dei numeri) inseriti in un contesto in cui il significato e' dato dal campo di esperienza stesso.

"Ho una cassetta da 180', ho gia' registrato un film che dura 95', quanti minuti di registrazione mi rimangono?"
"Ho una cassetta da 240', ho registrato 110', quanti ne rimangono?"
Analizzando come io ho affrontato questi problemi (90=180:2; 95=90+5; 90-5=85) (240-110=130) mi sembra di poter intuire che non e' solo il tipo di problema che presuppone un ragionamento ipotetico, ma che esso puo' essere presente anche solo nella strategia di calcolo, in dipendenza da certi valori numerici (se 90 e' la meta' di 180, allora dato che quello era 95, devo toglierne ancora 5).

Mi sembra, pertanto, che ci si possa chiedere se il calcolo (il lavorare attivamente con i numeri - beninteso non con il ricorso meccanico alle tecniche di calcolo) possa:
- presupporre e/o sviluppare una forma di ragionamento ipotetico
- sostenere il calcolo stesso a livello di schemi interiorizzati.
In quest' ottica si potrebbe quindi ipotizzare un campo di esperienza dei numeri che diventa "fatto culturale" nella misura in cui i bambini riescono a riflettere sul loro lavorare con i numeri e quindi a costruire degli schemi con i quali consapevolmente operare successivamente in altri campi di esperienza.
Abbiamo notato infatti che strategie spontanee nate dal campo di esperienza con le monete fanno si' che ad esempio "4 volte 520 lire" venga calcolato come 500x4 + 20x4. Se il problema, invece, e' riferito a misure di lunghezza "quante volte e' lungo un pezzo di strada su cui ho riportato 4 volte un nastro lungo 520 cm?", sembra che non venga cosi' spontaneo per i bambini "vedere" il nastro formato da 5 m e 20 cm a meno che il lavoro con le monete non sia passato da un piano di "praticita'" (agire con le monete) ad un piano di riflessione sui numeri.

3.2. "Compero una penna che costa 5000 e un quaderno che costa 2000, quanto spendo?"
"Ho 7000 e compero un quaderno che costa 2000, quanto ho di resto?"
Nel problema di addizione ogni oggetto ha il suo corrispondente monetario (OGGETTO/MONETE - OGGETTO/MONETE), e il campo di esperienza monete porta il bambino a pensare che "per avere quell'oggetto e quell'altro oggetto devo dare dei soldi".
Nel problema di sottrazione, invece, si ha un dato monetario iniziale (le 7000 lire) ed un secondo dato relativo all'oggetto con il suo corrispondente monetario (MONETE - OGGETTO/MONETE).
L'oggetto acquistato sta nel valore monetario iniziale non in quanto tale, ma come suo corrispondente monetario: si deve quindi vedere il suo valore "contenuto" nelle monete di partenza. Mi sembra pertanto che vi sia un'operazione mentale di "inclusione" che presuppone l'aver pensato che la parte inclusa possa stare o non stare nell'insieme di partenza. Inoltre, il campo di esperienza monete porta il bambino a pensare che " se per avere quell'oggetto devo dare dei soldi, allora quei soldi li devo prendere da quelli che ho". Pertanto, mentre nel caso additivo non si pone il problema "da dove prendo i soldi", nel caso di resto il campo di esperienza induce il bambino a chiedersi "come faccio a pagarlo?", oppure, in altre situazioni, "avro' del resto?" o "....dell'avanzo?"
E nel momento in cui il bambino si chiede se ha del resto o dell'avanzo... vuol dire che ha un'ipotesi di partenza che gli fa pensare che potrebbe anche non averlo.

Mi sembra, pertanto, che in questo tipo di problemi di sottrazione vi sia un'ipotesi implicita nella formulazione stessa del problema che puo' essere piu' o meno di ostacolo per i bambini che non sono ancora in grado di cogliere e di produrre ipotesi in dipendenza sia del campo di esperienza dei numeri (3.1.), sia del campo di esperienza riferito all'esperienza di vita (3.2.).

3.3. Vorrei analizzare ora altri due tipi di problemi di sottrazione sui quali parecchi allievi incontrano difficolta'.

"Come faremo all'inizio del prossimo anno scolastico a stabilire chi di voi e' cresciuto di piu'?"
La risoluzione di questo problema di "incremento" e' basata (per quanto si vede in classe) sulla progettualita' e sulla produzione di ipotesi. C'e', infatti, una implicita ipotesi iniziale relativa al fatto che si sia cresciuti (per l'insegnante che pone il problema puo' essere un fatto certo, non mi sembra che altrettanto possa essere per tutti i bambini), poi che la crescita non sia stata uguale per tutti i bambini della classe; quindi si passa al confronto delle crescite basato su "se Luigi e' cresciuto 2 cm e Maria 5 cm, allora e' cresciuta di piu' Maria...".
L'analisi delle strategie risolutive attuate dai bambini evidenzia, insita nella sottrazione, l'attivita' di "comparazione"

che si avvia in un opportuno ambiente mentale con la formulazione di un'ipotesi pleonastica ("se Luigi e' cresciuto 2 cm", "se 180 e' la meta' di 90"...). Questo "se", molto usato dai bambini e dagli adulti nella risoluzione di problemi complessi, linguisticamente vuole essere un "dato che"; esso potrebbe avere il carattere di segno di attivazione di un ragionamento che non si basa ancora su degli schemi (o Teoremi in atto), permettendo al dato certo della situazione di entrare in un gioco di relazioni.
Infatti, nella risoluzione dei problemi sopra citati ci sono dei dati certi che pero' devono essere tra loro collegati dinamicamente. Mi sembra che per poter effettuare questo collegamento sia necessario contemporaneamente pensare all'uno e all'altro dato vedendo la relazione che intercorre fra di essi in un processo dinamico che porta alla risoluzione finale.

Consideriamo, in effetti, problemi del tipo "Quanti anni avro' nel 2000?": possiamo avere la risoluzione mediante applicazione del modello matematico (dalla data di nascita al 2000) (poco frequente nei bambini all'inizio della classe III), oppure strategie risolutive del tipo "se ora ho 9 anni e siamo nel 1991, dal 1991 al 2000 ci sono 9 anni, quindi 9+9=18."
La stessa rappresentazione grafica puo' essere condotta in parallelo

$$\begin{array}{ccc} 9 & \longrightarrow & ? \\ 1991 & \xrightarrow{+9} & 2000 \end{array}$$

Nel merito delle questioni che stiamo affrontando mi pare ci si possa allora chiedere se:
- la costruzione di situazioni di contemporaneita' e il lavoro sui connettivi possano favorire la risoluzione di problemi prima (e in vista) della costruzione di adeguati schemi matematici
- possa esserci interdipendenza tra ragionamento ipotetico e capacita' di gestire mentalmente (progettare) situazioni di contemporaneita'
- sia possibile che il ragionamento ipotetico stesso (che per sua natura puo' avere piu' sbocchi) permetta e/o costringa a mantenere nella mente piu' di uno sbocco operativo, sollecitando la padronanza della contemporaneita', o se non sia che per giungere al ragionamento ipotetico prima si debba aver costruito la padronanza delle situazioni di contemporaneita'.

Questi interrogativi si collegano ad ipotesi su ulteriori funzioni che i campi semantici potrebbero avere nello sviluppo delle capacita' di risoluzione dei problemi e che riguardano la costruzione di competenze logico-linguistiche generali (come quelle connesse con la padronanza della contemporaneita' e del ragionamento ipotetico): se infatti la risoluzione di certi problemi comporta la necessita' di formulare e gestire ipotesi e comparazioni, ci si puo' chiedere come sviluppare tali capacita'; e anche in questo caso i campi semantici sembra possano giocare un ruolo cruciale (vedi ricerche condotte nel nostro gruppo a proposito dello sviluppo delle capacita' di ragionamento ipotetico in situazioni ben "contestualizzate" e non).

4. Campi di esperienza e "teoremi in atto".

I "campi di esperienza" sembrano intervenire con notevole efficacia nella costruzione di "teoremi in atto" (Vergnaud) che consentono ai bambini di ampliare ed approfondire la loro padronanza delle operazioni aritmetiche ai fini della risoluzione dei problemi aritmetici.
Dando per scontata tale funzione dei "teoremi in atto" (che si esercita sia direttamente, consentendo ai bambini di costruire adeguate strategie di calcolo, sia indirettamente attraverso una piu' approfondita padronanza dei significati delle operazioni), vediamo alcuni esempi che consideriamo significativi per giustificare l'ipotesi che i "campi di esperienza" possono essere utilizzati per "forzare" la costruzione di vari "teoremi in atto".

Un primo esempio e' gia' stato considerato in precedenza e riguarda l'emergere a 7 anni della proprieta' distributiva 420x4=400x4+20x4 nel calcolo di "quanto costano 4 oggetti da 420 lire". La natura del "materiale strutturato" delle monete e l'esperienza di "scomposizione" via via acquisita con le monete suggeriscono evidentemente questo comportamento (che con un po' di attivita' di riflessione puo' essere trasferito anche ad altri ambiti).
Rispetto ai dati riportati in letteratura, notiamo un anticipo di circa un anno nell'apparire di questo "teorema in atto". Anche le esperienze comparative citate in precedenza indicano che il lavoro con le monete facilita l'emergere di questo "teorema in atto".

Un secondo esempio concerne la scoperta che per moltiplicare (dividere) per 10, 100, ecc. basta aggiungere (togliere) uno, due, ... zeri "e per il resto tutto funziona allo stesso modo".
Ancora una volta, l'esperienza con le monete (da quelle correnti a quelle dell'epoca dei bisnonni) consente ai bambini di cogliere gli elementi "varianti" o "invarianti" nel passaggio da un ordine di grandezza all'altro realizzando un "salto" concettuale sul quale l'insegnante puo' agire in modo da renderlo consapevole e trasferibile.
Anche a proposito di questo secondo esempio, possiamo rilevare che:
- rispetto ai dati riportati in letteratura, il ricorso all'invarianza (che nelle nostre classi non viene "insegnata", ma "scoperta" via via dagli allievi) avviene con un significativo anticipo
- a parita' di eta' e di esperienza, nelle nostre classi il ricorso all'invarianza avviene prima nel campo di esperienza delle monete rispetto ad altri contesti (in particolare, misure di lunghezza).