

MATEMATICA

COSTRUZIONE DEI SIGNIFICATI DEL NUMERO E DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE, AVVIO ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

Obiettivi prioritari

In accordo con il testo dei nuovi programmi, si tratta di cominciare la costruzione dei principali significati del numero (ordinale, cardinale, misura...) e delle operazioni aritmetiche (in particolare per quanto riguarda l'addizione, la sottrazione e il confronto), di avviare il bambino ad una sicura padronanza della scrittura decimale-posizionale del numero basata sul significato delle cifre in relazione alla loro posizione e di realizzare un approccio corretto all'attività di risoluzione dei problemi, cardine dell'insegnamento della matematica nella scuola elementare. Occorre anche avviare il bambino al calcolo mentale limitatamente alle operazioni di cui conosce ormai a fondo il significato (addizione). Occorre infine avviarlo all'uso "significativo" della scrittura matematica (segni $+$ e $=$, primo approccio ai segni $>$ e $<$).

Linee di lavoro e indicazioni operative specifiche

Nel nostro progetto la costruzione dei concetti e delle abilità fondamentali in campo matematico avviene attraverso l'insegnamento per problemi contestualizzati in "campi di esperienza" significativi della realtà extrascolastica in quanto:

- fondamentale è il ruolo dei "contesti" significativi per il bambino nel condizionare i suoi comportamenti cognitivi: se un problema da risolvere (come anche un testo da capire) fanno riferimento a un "campo di esperienza" che il bambino conosce bene, le prestazioni del bambino si rifanno agli schemi di comportamento, alle attività, alle immagini che gli sono abituali in quel campo, e questo influenzerà la costruzione della strategia risolutiva (come anche la comprensione delle frasi del testo letto).

Per quanto riguarda i problemi matematici, "campi di esperienza" adeguati offrono la possibilità a tutti gli allievi (anche quelli con maggiori difficoltà di apprendimento) di cogliere il senso della situazione problematica prima ancora di essere in grado di pervenire ad una risoluzione autonoma del problema posto;

- la "padronanza del concetto" si realizza quando si fa esperienza dei significati che costituiscono quel concetto e li si collega tra loro e li si esplicita inserendoli, così, nella propria rete concettuale.

Le nostre scelte metodologiche inoltre sono caratterizzate da:

- un notevole spazio riservato (accanto alla costruzione di concetti e procedure matematiche) alle *attività di allenamento* (presentate con chiarezza come tali ai bambini al fine di stabilire un "contratto didattico" non ambiguo);

- l'abitudine, che va via via costruita nei bambini, ad esprimere le loro strategie risolutive e le acquisizioni concettuali (con ampio ricorso a processi di verbalizzazione in fase di risoluzione dei problemi, di rendicontazione delle risoluzioni costruite e di riflessione su esse; e a varie forme di rappresentazione linguistica -grafi, immagini- accanto all'uso di notazioni aritmetiche standard);

- l'avvio al confronto delle strategie risolutive e delle rappresentazioni proposte dai bambini in classe;
- la scelta dei problemi proposti, che avviene non solo in base a criteri di efficienza dal punto di vista dell'apprendimento che essi stimolano, ma anche in base a criteri di coerenza tematica: per mesi i bambini lavorano all'interno di un determinato "campo di esperienza" (che dà il nome anche ad uno dei quaderni in cui ogni bambino registra quanto si fa in classe), e i problemi proposti si succedono via via all'interno di tale "campo di esperienza" secondo una successione logica di tappe di approfondimento della conoscenza del tema scelto. L'itinerario didattico é quindi strutturato secondo vari criteri ordinatori intrecciati tra loro: la successione delle tappe di apprendimento "disciplinare" si intreccia alle successioni delle tappe di approfondimento "tematico" per i vari campi di esperienza.

Per quanto riguarda **la possibilità di raggiungere gli obiettivi di apprendimento previsti con i bambini "reali" delle nostre classi**, l'esperienza di questi anni indica che se si seguono le linee di lavoro previste e si dedica alle attività matematiche di "monete e prezzi" e "calendario" il tempo previsto nello "sviluppo temporale del piano di lavoro", praticamente tutti i bambini che arrivano alla scrittura completamente autonoma entro la fine della classe I (circa l'85%, in media) arrivano anche:

- alla conoscenza dei numeri entro il 20 (completamento della "linea dei numeri" con numeri mancanti, come nella verifica 3 a pag.150; ordinamento di un gruppo di cartellini con i numeri scritti sopra..)
- al pagamento di un prezzo (con una cifra significativa) entro il 1000 in più modi (come nella verifica 2 secondo es.);
- alla determinazione del costo complessivo di due "beni" di cui sono noti i singoli prezzi (entro il 1000)(verifica 2, I° es.);
- alla risoluzione di semplici problemi di completamento monetario (verifica 4);
- al calcolo di durate (dal 7 al 13 maggio ...) (verifica 3);
- alla lettura ed alla scrittura sull'abaco delle monete di prezzi con due cifre significative;
- alla lettura delle temperature sul termometro (verifica 7);
- a semplici calcoli di addizione e completamenti con numeri piccoli (verifica 8).

Nel corso dell'anno si devono affiancare:

- **le attività sul "calendario"** : esse consentono di costruire il significato "ordinale" del numero in stretta connessione con l'ordinamento dei giorni (a partire dalla "conta per contare", che il bambino di solito possiede già almeno per i primi numeri: *uno, due, tre, quattro...*) , e di legare il significato "cardinale" al significato "misura" attraverso la conta delle crocette per le assenze, lo stato del cielo, ecc. e la successiva costruzione degli istogrammi mensili ; il significato "misura" del numero viene da gennaio in poi rafforzato dalle attività sul termometro; i problemi di durata ("*fra tre giorni sarà* " "*Oggi è il 7 maggio; quanti giorni mancano al 13 maggio?*) contribuiscono, dalla fine di gennaio a maggio, alla costruzione di importanti significati dell'addizione e della sottrazione; l'analisi degli istogrammi mensili e il confronto tra istogrammi di mesi diversi costituisce l'ambito problematico naturale per attività di confronto tra i numeri (cominciando dal significato "misura" del numero, che meglio si

presta all'approccio a problemi di confronto e all'introduzione dei segni $>$, $<$).

- **le attività su "monete e prezzi"** : esse realizzano l'approccio alla scrittura decimale-posizionale dei numeri attraverso la "scala" dei valori monetari e contribuiscono (con la conta delle monete di ugual valore accanto alla conta delle crocette, in "Calendario") a costruire il significato "cardinale" dei numeri. Le attività su "Monete e prezzi" favoriscono anche la padronanza critica del significato cardinale in quanto usualmente la conta delle monete è "temperata" dalla considerazione del loro valore (che può essere diverso per le varie monete a disposizione: una moneta ne può valere 2, o 5, o 10 di altro tipo..... , evitando la fissità sul valore cardinale che si sa costituisce un grosso ostacolo nel passaggio alla scrittura posizionale dei numeri e soprattutto nel passaggio ai "numeri con virgola").

Fondamentale è il contributo del lavoro su "monete e prezzi" per quanto riguarda l'approccio ai problemi ed ai primi, importanti significati dell'addizione e della sottrazione (per l'addizione si distinguono bene i significati di "scomposizione additiva" -legato al pagamento di un prezzo in uno o più modi- e di "composizione additiva" - legato al "*quanto spendo se compero e*" ; per la sottrazione, il primo significato che è naturale affrontare è quello di "completamento" (*ho lire; quanto mi manca se voglio acquistare ... che costa....*) ; successivamente si può passare al "*quanto resta*" (*se avevo ...e compro una cosa che costa....*) , e - tra la fine della prima e l'inizio della terza - al "*quanto di resto*" (*se pago con una banconota da una cosa che costa....*). Anche se non può essere assolutamente considerato obiettivo terminale per la classe I, può essere utile cominciare a proporre verso la fine della prima problemi del tipo "*quanti dolci da 300 lire possono comperare con 800 lire*", da risolvere con strategie (molto naturali per i bambini) di progressivo svuotamento delle 800 lire, 3 monete da 100 per volta (sottrazione ripetuta, cioè approccio alla cosiddetta "divisione di contenza"). Infine, può essere utile proporre (nelle ultime settimane di scuola) i primi problemi di confronto (nella forma: "*possibilità di comperare... con...*" ; e nella forma "*chi può comperare di più, Elena o Sergio?*") (vedi verifica 11)

Le attività su "monete e prezzi" costituiscono la base per introdurre (non prima del mese di marzo!) l'abaco delle monete per registrare e leggere prezzi e per fissare l'attenzione sulle regole della scrittura decimale-posizionale dei numeri a partire dai valori monetari delle cifre che intervengono nella scrittura di un prezzo.

I problemi di addizione e poi di completamento costituiscono (non prima del mese di marzo!) l'ambito naturale nel quale introdurre il formalismo standard dell'addizione ($300 + 200 = \dots$) e poi della sottrazione "di completamento" ($200 + \dots = 600$).

Quando si nota che parecchi bambini cominciano a ricordare che "*duecento e duecento fa quattrocento*" è opportuno (con gradualità) cominciare a proporre esercizi di calcolo a mente di semplici addizioni : "*duecento e duecento fa quattrocento... due e due fa? due e uno fa ?*"

Scorrendo la successiva documentazione sul lavoro in classe si possono ricavare indicazioni operative molto dettagliate. In particolare riteniamo opportuno richiamare l'attenzione sui seguenti punti:

- per "**monete e prezzi**": iniziare subito (primi di ottobre) il lavoro di pagamento di un prezzo, usando monete da 100 e da 200 ; anche se si accetta che i bambini più deboli paghino con le sole monete da 100 , è importante che essi si rendano conto (attraverso la registrazione sul quaderno degli esempi dei compagni) che si può anche utilizzare un'altra moneta..... Questa esperienza, anche se indiretta, può ridurre i rischi della "fissità della conta cardinale" (insita nella conta delle sole monete da 100) e preparare il terreno per quando, da gennaio in poi, si comincerà ad insistere anche con il bambino "debole" affinché usi la moneta da 200 e quella da 500 (significato "valore" del numero : "una" moneta ne vale "due" da cento).

Fin dall'inizio è bene affiancare le tre scritture seguenti : *300 ; 3 cento; trecento*; ciascuna di esse presenta vantaggi peculiari: la prima è la scrittura standard dei prezzi (e dei numeri delle monete), la seconda evidenzia l'ordine di grandezza del prezzo, la terza corrisponde alla numerazione parlata.

Come vedremo anche più avanti, è importante seguire il meccanismo "reale" di pagamento dei prezzi (quindi partire da "*devo pagare 300 lire, come posso fare*" e non da "*ho 100 lire, cosa posso comprare*"), ed è importante fin dall'inizio procedere senza un ordine prestabilito (la prima volta potrà trattarsi di un prezzo di 300 lire, la seconda volta di un prezzo di 200 lire, e poi di un prezzo di 400 lire ecc.). E' opportuno alternare qualche acquisto "vero" in negozio a simulazioni in classe, a qualche acquisto "vero" in classe (oggetti di cancelleria, frutti, merende del supermercato- previo accordo con i genitori), al "gioco del mercatino", alla "banca" (dove si cambiano le monete...). In ogni caso è necessario lavorare con monete vere, anche per creare situazioni impegnative "realistiche" (ad esempio: come pagare 600 lire se nel portamonete ci sono - ed è vero! - solo 3 monete da 100 e 2 monete da 200 ?)

La moneta da 500 può essere introdotta in novembre, quella da 50 va introdotta entro Natale ma utilizzata solo per completare prezzi del tipo "350 lire" (tre monete da 100 ed una da 50) , senza forzare i bambini a ragionare in termini di "*due monete da 50 valgono come una da 100*"

Con l'introduzione della moneta da 10 (in marzo) si potrà gradualmente portare i bambini a considerare la moneta da 50 come "*cinque da 10*", e quindi alla fine scoprire che "*due da 50 fa 100*".

L'introduzione della moneta da 10 apre la strada alla realizzazione dell'abaco delle monete, unico abaco da utilizzare in classe (da marzo in poi). Non è necessario introdurre subito la moneta da 1 lira : si può lasciare la colonna corrispondente vuota, e poi - in aprile/maggio - introdurre anche la moneta da 1 lira per il cambio: 10 monete (...di carta) da 1 lira per 1 moneta da 10 lire.

Altra raccomandazione importante: è bene non separare i problemi di "*come si può pagare una cosa che costa...*" dai problemi di "*quanto manca...*", dai problemi di "*quanto resta...*"; da gennaio in poi è bene liberamente alternare problemi diversi nell'ambito delle diverse unità didattiche (per evitare la formazione di stereotipi sostitutivi del ragionamento).

- per "**calendario**": le attività matematiche sono strettamente associate al lavoro sulla successione dei giorni del calendario. Fin dal primo mese i bambini annotano ogni giorno le assenze (eventualmente anche lo stato del tempo), e svolgono giornalmente esercizi di indicazione del giorno sul calendario ("*segna il giorno 4*") e di lettura del giorno ("*che giorno è questo?*"). I bambini si appoggiano (ed è bene si appoggino!), all'inizio, alla "conta per contare" : per

"segnare il giorno 4" il bambino che ancora non riconosce il 4 percorre la successione (verticale!) dei numeri scandendo "uno...due...tre...quattro" ; idem per trovare "che giorno è questo".

Naturalmente, nei primi mesi i bambini più in difficoltà verranno "forzati" con esercizi che si spingono solo fino ai confini della loro "conta per contare" ; però è importante che già in ottobre essi sentano dei compagni che contano fino a 18 e fino a 31 !

Non è assolutamente il caso di "forzare" i bambini alla conta regressiva (in base a quello che abbiamo visto, in I la conta regressiva produce più guai che vantaggi). A partire da novembre l'istogramma delle assenze (e poi anche quello dello stato del cielo) offre la possibilità di sviluppare il significato "cardinale" del numero (conta di crocette...) e di associarlo al significato "misura" (altezza delle colonnine dell'istogramma).

Da dicembre in poi si possono cominciare esercizi di ordinamento dei numeri del calendario (scritti su foglietti).

Da novembre in poi si possono fare esercizi di copiatura di una parte della successione (all'inizio solo verticale!) dei numeri del calendario . Si raccomanda invece di rinviare il più possibile (almeno fino a gennaio) gli esercizi di dettatura dei numeri: essi non sono necessari per le attività matematiche previste fino a febbraio-marzo (se il bambino non ricorda come si scrive un numero che vuol scrivere, potrà copiarlo dal calendario). Questo per evitare carichi eccessivi e non necessari di attività sulla memoria , e possibili problemi connessi con la padronanza attiva della scrittura di numeri a più cifre significative

A proposito dei numeri a più cifre significative (come 16 o 350) si raccomanda di non perdere tempo prima di marzo a spiegare che 16 è costituito da "1 decina e 6 unità"; fino a marzo i numeri vanno riconosciuti come segni "globali" (di giorni del mese, di prezzi...) ; sarà l'abaco delle monete che da marzo in poi consentirà di penetrare (con riferimento ai significati "monetari" delle cifre dei prezzi) il meccanismo di scrittura decimale-posizionale dei numeri.

Da gennaio in poi (approfittando del fatto che è facile per i bambini procurarsi a casa un calendario - si raccomanda di dare ai genitori il suggerimento di un calendario con la successione dei numeri dei giorni in verticale) si possono stimolare i bambini a fare uso anche del calendario che hanno a casa (per registrare avvenimenti-con disegni e poi anche con brevi didascalie, per contare i giorni, ecc.).

Da gennaio in poi si potrà eliminare la registrazione delle assenze e delle presenze, continuando solo con la registrazione dello stato del cielo e introducendo la registrazione delle temperature lette sul termometro.

A proposito della lettura del termometro si raccomanda di non forzare (in I) il meccanismo spontaneo di lettura da parte dei bambini (molti di loro contano tutti i gradi anche se devono contarne 23). Sarà in parte la fatica, in parte l'esempio dei compagni, che gradualmente "forzerà" i bambini ad adottare strategie più efficienti . Tali strategie presuppongono però implicitamente che il bambino "abbia fiducia che" per leggere 23 gradi è sufficiente separare la colonnina in due parti: ".....una, che so che vale 20,e conto poi i gradi dell'altra parte..... 21,22,23!". Ciò richiede un livello di maturazione che legittimamente può non essere raggiunto da parecchi bambini di I. "Insegnare un comportamento efficiente" ai bambini vorrebbe dire sottrarre loro la possibilità di maturare (per la necessità di risparmiare fatica!) una conquista intellettuale importante

(connessa alla cosiddetta "proprietà additiva della misura") e sostituire tale "conquista" con un meccanismo mnemonico privo di basi concettuali.

Sempre a proposito del termometro si raccomanda di svolgere regolarmente sia l'attività di lettura del termometro "vero" (1-2 bambini per volta), sia l'attività di registrazione sul termometro di carta (vedi pag. 173) della temperatura letta. Si noti che la lettura del termometro corrisponde al passaggio misura -----> numero, la registrazione sul termometro di carta della temperatura letta corrisponde al passaggio numero -----> misura. La padronanza del significato "misura" del numero richiede l'interiorizzazione di entrambi i passaggi !

I problemi di durata sul calendario potranno affiancare problemi di "struttura" analoga (addizione ... completamento quanto resta ?) affrontati in ambito "monete e prezzi". E' bene tuttavia rilevare che, nonostante l' analogia "strutturale", per quanto riguarda i significati non è la stessa cosa (ad esempio) chiedersi " *quanti giorni mancano al 9 marzo, se oggi è il 5 marzo*" o " *quanto mi manca per comprare una cosa che costa 900 lire, se ho 500 lire*" : nel primo problema, la percezione del "quanto manca" rinvia ad una successione di giorni, a un procedere nel tempo, che mantiene separati nel tempo i due dati, nel secondo caso, ad un completamento che mette in relazione due quantità di monete che possono essere pensate compresenti. La strategia di calcolo prevalente sarà però analoga nei due casi ("6...7...8...9 ..."), e costituirà un modello matematico unificante per i due significati; ma è interessante notare che esistono anche strategie di calcolo che tengono conto dei diversi significati (ad esempio, nel secondo problema alcuni bambini lavorano così: "500...700...900", ricordando le monete da 200 ; e qualcuno perfino così : " *da 500 a 1000 sarebbero 500, ma sono 100 in meno...mi mancano 400 lire!*").

Presupposti teorici

Vorremmo limitarci qui a sintetizzare alcuni aspetti del discorso teorico che giustificami le nostre proposte didattiche (rinviando il lettore interessato ad ulteriori approfondimenti agli articoli pubblicati nel volume VI di questo Rapporto Tecnico e al testo pubblicato a pag. 28 di questo volume):

- sui significati del numero e delle operazioni: la padronanza del numero passa attraverso la padronanza dei suoi principali significati (ordinale, cardinale, misura...); d'altra parte, nessun significato- per quanto se ne sa oggi - può derivare dalla padronanza di altri significati , e quindi tutti i significati più importanti vanno curati in modo equilibrato.

In particolare ,in base a esperienze ormai molteplici (tra le quali spicca quella del fallimento dei programmi del 1969 in Francia, fondati sull'approccio insiemistico al numero e alle operazioni aritmetiche) emerge che è opportuno evitare di dare eccessivo peso al significato "cardinale" del numero, che può costituire ostacolo all'acquisizione degli altri significati con una sorta di "fissità della conta". Anche nel nostro lavoro ci siamo resi conto che alcuni bambini di livello basso vengono bloccati dalla "fissità della conta" delle monete nel passaggio alla padronanza del fatto che una moneta da 200 ne vale 2 da 100, ecc.

Quanto detto ora per il numero vale anche per ciascuna delle operazioni aritmetiche e per la pluralità dei loro significati.

D'altra parte la costruzione di un significato del numero (o di una operazione aritmetica) avviene tanto più profondamente e facilmente quanto più il significato è collegato a situazioni "significative", che ne favoriscono

l'interiorizzazione nello sforzo di venire a capo del problema affrontato; e tanto meglio se si tratta di situazioni della vita extrascolastica, in quanto ciò consente l'utilizzazione dell'esperienza extrascolastica come elemento che "dà senso" all'apprendimento in corso e offre possibilità di successivi momenti di "risonanza" e "rinforzo" (fuori della scuola) con l'apprendimento realizzato a scuola ;

- sulla scrittura decimale-posizionale del numero: essa mette in gioco il significato "valore" del numero, che comporta la difficoltà di staccarsi dall'evidenza immediata (cifra 1 - valore 1) per ragionare sui significati che la cifra può assumere in relazione alla sua collocazione nel numero scritto in cifre. Per questo motivo appare fortemente propedeutico il lavoro sulle monete, che obbliga il bambino a interrogarsi continuamente sul valore di quella particolare moneta con cui sta operando ;

- sull'introduzione del formalismo aritmetico : sono noti e ben presenti agli insegnanti i rischi di una introduzione troppo precoce dei segni delle operazioni (perdita di contatto con i significati, tendenza - nei problemi- a combinare a caso i dati numerici con i segni delle operazioni, ecc.). In generale, ha senso introdurre i segni delle operazioni quando i bambini li possono riconoscere come "indicatori" di significati già posseduti a fondo, che richiamano ben precise attività da svolgere sui dati numerici. Mentre è ragionevole introdurre nel corso del II quadrimestre della classe I il segno + , non sarebbe ragionevole introdurre in I il segno - in quanto i bambini ancora non possiedono a fondo sufficienti significati della sottrazione e soprattutto tendono a risolvere tutti i problemi di sottrazione con strategie di "completamento" (che si schematizzano con $7+ \dots = 9$);

- sul calcolo mentale: la memorizzazione della tabellina dell'addizione ha una importanza notevole nel "contrarre" strategie di calcolo che il bambino già possiede a fondo per quanto riguarda i significati permettendo così di sviluppare strategie di calcolo più complesse. Per questo motivo si raccomanda in I di iniziare qualche attività di calcolo mentale con numeri con una sola cifra significativa (come : 3 e 2 fa ... o anche 300 e 200 fa...) spingendo i bambini a memorizzare gradualmente il risultato.