

COSTRUZIONE DI CONCETTI E DI ABILITA' DELL'ARITMETICA NEL CAMPO DI ESPERIENZA "MONETE E PREZZI"

0. INTRODUZIONE

Il collegamento con la realtà e con le esperienze extrascolastiche per favorire i processi di apprendimento degli alunni è alla base del nostro Progetto, e tutte le Unità Didattiche perseguono tale collegamento.

Di seguito riportiamo l'approfondimento sul significato "valore" del numero e sulle attività di composizione-scomposizione con le monete attraverso il lavoro su "Monete e prezzi". Abbiamo scelto di approfondire i problemi di apprendimento relativi a questa Unità Didattica, in quanto, in base all'esperienza degli insegnanti in oltre 15 anni di sperimentazione, la produttività sua in classe dipende dalla consapevolezza che gli insegnanti hanno dei nodi concettuali e delle abilità in gioco.

N.B.: Per la trattazione completa vedi il report di Ezio Scali "Alcune ricerche sull'approccio al numero e alle operazioni aritmetiche nella scuola elementare", Pisa 1996, (volume VI di questo Rapporto Tecnico).

1. PRINCIPI GENERALI

Molti progetti di insegnamento della matematica sviluppati negli ultimi decenni in diversi Paesi (Olanda, USA, U.K., ecc.) sono basati sull'ipotesi che il riferimento a problemi "reali" ed esperienze extrascolastiche degli alunni possa favorire i loro processi di apprendimento. Importante è pertanto che, durante la costruzione del sapere matematico attraverso il riferimento all'esperienza comune extrascolastica, si realizzi il passaggio dal sapere matematico implicito in determinate pratiche sociali al sapere matematico scolastico e decontestualizzato. Questo passaggio richiede grande attenzione da parte dell'insegnante che, se vuole rendere utilizzabili e trasferibili le conoscenze implicite nell'attività del bambino, deve renderle esplicite e comunicabili, guidando il loro avvicinamento al "sapere" matematico standard.

Nel progetto "Bambini, Maestri, Realtà" le attività sono condotte utilizzando il concetto di "campo di esperienza", *che permette di rendere conto della complessità del rapporto fra insegnamento e apprendimento, all'interno di un quadro di scelte culturali e didattiche in cui specifici contesti extrascolastici vengono assunti come terreno privilegiato di lavoro didattico.*

L'analisi che segue riguarderà il "campo di esperienza" "Monete e prezzi" in quanto è in esso che durante la classe prima vengono a strutturarsi il significato "valore" del numero e si realizzano attività di "composizione e scomposizione additiva" attraverso le quali si sviluppano processi mentali e strategie risolutive che sono alla base della costruzione dei significati del numero e delle operazioni aritmetiche e dell'approccio corretto alla risoluzione dei problemi matematici.

La scelta di questo "campo di esperienza" (come ambiente in cui svolgere attività "realistiche") consente di superare, da un lato, il ricorso a "realtà" strutturate ad hoc per un utilizzo esclusivamente "scolastico" in funzione dei primi apprendimenti aritmetici e, dall'altro, l'uso del contesto "reale" come contesto solo evocato nel testo dei problemi. Questa scelta consente infatti

di realizzare in classe attività che mettono in gioco tutti i concetti aritmetici di base e, insieme, permettono una produttiva convergenza con l'esperienza extrascolastica.

Il bambino, nell'accostarsi alle situazioni "economiche" di acquisto e pagamento, prende coscienza dell'esistenza di convenzioni che regolano il valore e l'uso delle monete, affronta i conflitti che emergono quando il suo pensiero si confronta con gli ostacoli insiti nelle esperienze (ad esempio, nel confronto fra le monete a disposizione e i prezzi, nel rapporto fra la quantità e il "valore" delle monete, nell'acquisto di più merci con un unico pagamento, nel meccanismo del "resto", ecc.) e trova una risonanza con le proprie o altrui esperienze extrascolastiche.

Notiamo che anche attraverso il lavoro negli altri "campi di esperienza" "Calendario" e "Termometro" si costruiscono alcune delle competenze che analizzeremo di seguito; in particolare questi "campi di esperienza" investono la variabile tempo, i marcatori del tempo e le durate, intervenendo quindi nella costruzione di particolari significati del numero e delle operazioni aritmetiche.

Per essi facciamo riferimento alla documentazione specifica riportata in seguito.

2. IL RUOLO DI MEDIAZIONE DELL'INSEGNANTE

Anche in ambito matematico il maestro svolge un ruolo cruciale nella mediazione tra il pensiero del bambino e la costruzione dei significati e dei concetti disciplinari.

L'insegnante esercita il suo ruolo di mediazione attraverso le seguenti attività:

- **attività individuali**: in esse l'insegnante può interagire con il pensiero del bambino sia nel momento iniziale in cui, non essendo l'alunno ancora pervenuto alla scrittura autonoma, assume un ruolo importante il "prestamano", sia successivamente attraverso l'interazione scritta o il dialogo (*cfr. documentazione "Monete e prezzi", ottobre, acquisti reali – 22 febbraio, problemi che nascono da esperienza diretta*).

Attraverso l'interazione individuale con il bambino, l'insegnante ha modo di conoscere più direttamente l'approccio del bambino al problema, di forzare e proporre (nella sua "zona di sviluppo prossimale") procedure e rappresentazioni esterne (disegni, segni matematici, ecc.), di stabilire connessioni con esperienze precedenti. Tutto questo serve all'insegnante per evitare, ad esempio, interventi precoci o inadeguati rispetto a quel particolare bambino o a quel particolare concetto, o realizzare la diagnosi di specifiche difficoltà;

- la **discussione**, che avviene nel corso del confronto di strategie personali: è la sede in cui socializzare modi diversi di accostarsi ad una situazione problematica e in cui valorizzare determinate procedure sulla base della loro efficacia e generalità (e non sulla base di convenzioni spiegate dall'insegnante).

Nella fase di risoluzione individuale del problema il bambino sviluppa, attraverso la verbalizzazione (scritta) del ragionamento, un primo livello di consapevolezza. Il linguaggio verbale può rendere conto della strategia seguita, ma può essere talvolta lo strumento del pensiero necessario a guidarla o addirittura a produrla. Questo primo livello di consapevolezza non appare però sufficiente per la maturazione delle competenze, essendo interno al processo attuato.

L'insegnante propone quindi, successivamente, la riflessione sull'azione compiuta, mediante la pratica didattica del confronto delle strategie attuate. In esso viene richiesto al bambino di riconoscere se la procedura che egli ha seguito nella risoluzione individuale assomiglia a quella presentata. Il riconoscimento della somiglianza o della differenza fra la propria modalità e quella del compagno rappresenta una condizione importante per la sensibilizzazione verso un secondo livello di consapevolezza. Il bambino è forzato a vedere la situazione problematica che ha risolto in precedenza da un altro punto di vista, a mettersi cioè su un piano di generalità. Egli è sollecitato a comprendere come hanno ragionato i compagni attraverso un'attribuzione di significato alle tracce linguistiche che essi hanno prodotto, e quindi, dopo aver compiuto le stesse operazioni di distanziamento verso il proprio ragionamento, prendere in considerazione la somiglianza delle operazioni mentali compiute. (cfr. documentazione "Monete e prezzi", 11 ottobre, confronto con un altro modo di pagare, 7 febbraio confronto con doppio acquisto)

Poiché questa attività presenta livelli differenziati di difficoltà, non sempre è accessibile a tutti i bambini autonomamente e ciò richiede che l'insegnante interagisca individualmente con l'allunno in difficoltà.

3. IL SIGNIFICATO " VALORE " DEL NUMERO

Riteniamo che esista una giustificazione all'uso del termine "significato valore", fondata sostanzialmente sul suo utilizzo didattico, come categoria necessaria a distinguere uno specifico aspetto del numero non riconducibile in modo soddisfacente ad altri significati, aspetto con cui i bambini entrano in relazione nel lavoro in un particolare campo di esperienza, quello "delle monete e dei prezzi".

Il "significato valore" fa riferimento a una convenzionalità che trova il suo fondamento nella realtà esterna alla scuola e nel fatto che tale convenzionalità è socialmente condivisa.

Il "significato valore" implica l'idea della "contrazione della cardinalità": esprime la consapevolezza che, ad esempio, UNA moneta da 500 assume il valore di CINQUE monete da 100. Questa acquisizione è resa possibile dalla assunzione delle "100 lire" come entità autonoma, connessa a sua volta ad un oggetto identificabile (la moneta da 100 lire).

La coscienza di questa acquisizione diviene un fatto stabile nell'esperienza: può cambiare localmente il referente concreto (introduzione di nuovi tagli monetari, accostamento a sistemi in vigore in altri paesi), ma il criterio dell'attribuzione del "valore" permane.

Notiamo che l'ambito monetario è un campo di esperienza dove il "valore" ha un significato che non si ritrova in altre situazioni esperienziali (come quella di "confezioni da ... oggetti l'una").

L'utilizzo di questo punto di vista del numero non appare spontaneamente: molti bambini, inizialmente, vorrebbero poter disporre di molte monete da 100 lire per effettuare un pagamento, senza manifestare la richiesta di utilizzare monete di valore più alto. Ciò li induce a iniziare la conta delle monete dalle monete da 100 di cui dispongono, fino al loro esaurimento, oppure conduce qualche bambino ad un "errore" tipico, quello di trattare tutte le monete come se fossero da cento, assegnando loro lo stesso valore, benché le caratteristiche fisiche degli oggetti-moneta siano differenti (in quanto a colore, dimensione, figure rappresentate). La tendenza iniziale di molti bambini nelle prime esperienze nel campo di esperienza delle monete è quindi di trattare le

monete come se fossero oggetti della stessa natura, applicando ad esse la conta cardinale.

Queste considerazioni rimandano al fatto che per introdurre il diverso valore attribuito ai vari tipi di monete, l'insegnante deve far riferimento a qualcosa di esterno rispetto alle caratteristiche percettive della situazione: deve riferirsi a una *convenzionalità sociale* che regola - storicamente - l'uso operativo delle monete, tale per cui, "per regola", nel sistema attualmente in vigore in Italia, la moneta gialla e grigia vale 5 monete da 100 lire.

Perché questo ambito sia un terreno di lavoro produttivo, l'insegnante deve mettere il bambino nelle condizioni di affrontare realmente il conflitto che nasce dal confronto fra le sue concezioni, le sue rappresentazioni, il suo modo di pensare e di agire (cioè il suo "contesto interno"), ed il contesto delle situazioni problematiche del campo di esperienza, in cui i vincoli della realtà e le convenzioni sociali non possono essere interpretati e modificati soggettivamente.

L'insegnante, gestendo processi di apprendimento che si sviluppano su un lungo periodo di tempo, deve proporre situazioni problematiche in cui il bambino assuma "dal vivo" alcune dimensioni della complessità dei rapporti economici. Per l'alunno ciò implica di prendere in considerazione gli elementi della situazione sociale di uso delle monete: le regole che governano gli scambi denaro-merce e almeno un altro soggetto, oltre a se stesso. Questo richiede scelte didattiche rigorose, mirate a non sovrapporre una tradizionale gradualità "scolastica" (ad esempio, prima acquisti da 100 lire, poi da 200 lire, ecc., che prevedono la costruzione del significato valore come un processo formale - di tipo deterministico - di astrazione dal materiale usato) a una gradualità di altro tipo, che fa riferimento alla possibilità per il bambino di maturare, agendo nella sua zona di sviluppo prossimale, processi via via più articolati e complessi, attraverso l'attività di risoluzione di problemi di cui coglie il senso (secondo questa gradualità, il primo acquisto significativo può riguardare un oggetto che costa 400 lire!).

4. CONVENZIONALITA' DEL SIGNIFICATO "VALORE" E PERCEZIONE

La convenzionalità del valore confligge con l'aspetto percettivo delle monete (nell'oggetto - a differenza di altri sistemi di misura - nulla di immediatamente percepibile segnala che la moneta da duecento ha il valore di due monete da cento: nel sistema monetario italiano essa è di dimensioni più ridotte di quella da cento). La convenzione rivela, tuttavia, un aspetto importante nella fase iniziale del lavoro. E' la sua **componente matematica** a dover essere presa in considerazione: nell'oggetto-moneta è il segno numerico che su esso è identificabile che costituisce il "marcatore" del valore, inteso come espressione del potenziale potere di acquisto della moneta.

Il rapporto che il bambino instaura con il segno numerico delle monete è un rapporto complesso:

- innanzitutto perché è complessa la gestione del doppio binario di conta, quello relativo al valore e quello relativo alla quantità di monete. Inizialmente il bambino può identificare nel criterio della misura il quantificatore del valore ("*Ho sei monete, tu ne hai tre, perciò ho più denaro io*"); questa concezione non regge all'interpretazione fondata sulla convenzionalità sociale ("*Sì, però io ho due monete da duecento lire e una da cinquecento, tu ne hai sei da cento, io posso comprare la pizzecca da 700 lire, tu no*");
- inoltre, perché il valore di una moneta appare come la contrazione di un processo di conta

secondo il criterio della cardinalità ("*cento, 2 cento, 3 cento, 4 cento, 5 cento*": l'ultimo numero denomina il valore dell'oggetto-moneta) e richiede al bambino la coscienza della convenzione;
- il significato valore ha anche forti relazioni con aspetti della misura (in termini di comparazione di valori: fra denaro disponibile e prezzo, fra le monete già selezionate e il prezzo da comporre...).

Lo "strumento di misura" del valore ha un intermediario sociale, secondo due possibilità: da un lato sul versante delle regole interne (a fondamento matematico socialmente condiviso) di uso delle monete, tale per cui $800 = 500 + 200 + 100$, ma anche $200 + 200 + 200 + 200$, oppure $500 + 100 + 100 + 100$, ecc.; dall'altro sul versante del potere di acquisto (anche questo, a fondamento sia matematico che sociale), tale per cui se con la moneta da 100 lire acquisto una busta, con la moneta da 200 lire acquisto due buste e con quella da 500 lire ne acquisto cinque.

Il campo di esperienza è perciò un forte luogo di risonanza di esperienze condivise a livello delle pratiche sociali in uso.

Dal punto di vista del bambino, ciò non si configura solo come una conoscenza di convenzioni economiche attualmente in vigore (sarebbe riduttivo!), ma anche - e soprattutto - come processo di costruzione di significati e della capacità di gestire un ambiente mentale complesso. Dal punto di vista dell'insegnante, il riferimento al materiale-moneta non è assimilabile all'uso di un materiale strutturato ad hoc per un utilizzo esclusivamente scolastico, in quanto il rapporto che il bambino instaura con esso è di natura diversa. Si tratta, per l'insegnante, di considerare le potenzialità che le monete, in quanto oggetto carico di una semantica storicamente e socialmente determinata, possono avere per un approccio ai significati del numero e delle operazioni aritmetiche che dialoghi con le rappresentazioni mentali degli alunni;

- infine, perché il numero che esprime il significato valore si intreccia con la funzione di designazione che esso assume: "500" permette anche la differenziazione di una particolare moneta dalle altre.

Si può affermare che il "valore" è necessariamente connesso alla padronanza della cardinalità e della misura, e in particolare carica cardinalità e misura di una componente sociale: il significato di valore si pone come un **significato sociale** portato nel mondo dei numeri.

4.1 I COMPORTAMENTI DEI BAMBINI

I bambini presentano comportamenti interessanti nel conteggio del valore.

Se la conta riguarda un insieme di monete (insieme dato o insieme costruito progressivamente in relazione alla necessità di effettuare un pagamento), il bambino generalmente usa le dita, con funzioni di testimone del conteggio e di supporto che permette di conservare la memoria del conto. Ad una parola-numero viene alzato un dito e così, contando la moneta da 200, il bambino dice "100", alzando un dito, poi dice "200" alzando un altro dito. Lo stesso avviene se la moneta da 200 non è al primo posto nella conta: ad esempio, dirà "400, 500" alzando prima un dito, poi un altro.

Una fase che si osserva (in corrispondenza della crescita della maturità rispetto alla padronanza del "valore" incorporato nelle monete) è che il bambino organizza il conto sulla base delle monete distinte: esse diventano portatrici di "valore" e molti bambini ad una moneta da 200 alzano contemporaneamente due dita, procedendo nel conto con la successiva moneta.

Il gesto può essere interpretato come una rappresentazione contratta del valore incorporato nelle monete e sembra costituire un elemento necessario all'interiorizzazione e alla concettualizzazione del valore.

4.2. LA MEDIAZIONE SEMIOTICA

L'insegnante costituisce il tramite tra gli stimoli cognitivi che il bambino riceve e le risposte che dà agli stimoli ricevuti.

E' necessario considerare con attenzione la funzione di mediazione semiotica dell'insegnante nell'introduzione e nella valorizzazione di modi di scrivere e, più in generale, di rappresentare i numeri.

A questo proposito un primo ordine di problemi riguarda i tempi e i modi per introdurre rappresentazioni che non si giustappongano al processo di pensiero del bambino.

Un secondo ordine di problemi concerne il rapporto fra l'uso operativo del materiale e la rappresentazione linguistica. Appare essenziale il ruolo di "prestamano" assunto dall'insegnante nella fase in cui gli alunni non sono ancora pervenuti alla scrittura autonoma, che veicola il senso del lavoro mentale con i numeri a partire dal significato che essi assumono nella situazione problematica.

La manipolazione delle monete ha un carattere di flessibilità che investe l'interiorizzazione (*cfr. successive analisi dell'attività di composizione -scomposizione, punto 6*) e il bambino, attraverso l'uso concreto del materiale, compie associazioni gesto-parola importanti ai fini della costruzione dei significati. Il disegno delle monete assumerà un ruolo importante via via che il lavoro procede, sostituendo progressivamente (all'interno di un processo che può prevedere, per alcuni bambini, la manipolazione del materiale per lungo tempo) l'uso delle monete reali, ma l'atteggiamento con il quale il bambino utilizzerà il disegno della moneta da 200 e da 500 lire (e successivamente i linguaggi simbolici standard 200 e 500) è fortemente condizionato dalle esperienze di manipolazione che ha condotto precedentemente, le quali ora costituiscono il riferimento per le operazioni mentali che egli compie.

Fin dalle prime esperienze di rappresentazione si pone per il bambino il problema di selezionare gli aspetti che contano: il bambino riconosce che è indispensabile scrivere il numero che esprime il valore, piuttosto che i connotati esterni della moneta, quali il colore o la figura. Il particolare contesto nel quale il disegno viene richiesto, fa sì che esso possa evolvere sotto la spinta della padronanza progressiva dei significati e che questa padronanza sia veicolata e favorita dalla possibilità di rappresentarla graficamente.

Un esempio, a questo proposito, può essere costituito dal passaggio:

100 e 100 -----> 2 da 100 -----> 200

che trova il corrispondente nella moneta da duecento e nella possibilità di rappresentarla.

Il disegno presenta, però, una rigidità maggiore della manipolazione: la moneta disegnata condiziona il successivo sviluppo del pensiero. Il bambino avverte gradualmente la necessità di prevedere e di progettare il disegno delle monete necessarie a pagare un determinato prezzo: per esteriorizzare ciò che pensa di fare, deve ricorrere all'interiorizzazione del "valore" delle monete.

5. LA COMPONENTE SEMANTICA DEL "VALORE" NELLA MODELLIZZAZIONE DELLA SCRITTURA DECIMALE POSIZIONALE

Sul piano didattico il significato valore, nella sua specificità, favorisce e sollecita anche altre importanti conseguenze sul piano della padronanza dei significati del numero naturale.

In particolare, interviene nella costruzione e nella interiorizzazione della scrittura decimale posizionale apportando una forte componente semantica.

Considerare il "valore" delle monete abitua i bambini a prestare attenzione alla collocazione delle cifre significative: distinguere 100 da 1.000 e 1.000 da 10.000 significa rendersi conto che la posizione di "1" è relativa e che a ciascuna posizione corrisponde un "valore". Ciò non si configura come un apprendimento meccanico (anche se ad un certo punto diviene necessariamente un automatismo) poiché è supportato dall'uso delle monete in situazioni reali, che fornisce significato al "valore" della cifra "1" nelle "100 lire", nelle "1.000 lire" e nelle "10.000 lire".

Il rapporto fra la denominazione linguistica del numero (ad es. millequattrocento) e la scrittura del numero (1.400) è complesso. Inizialmente, alcuni bambini scrivono millequattrocento in questo modo: "1000400", seguendo sequenzialmente e letteralmente la denominazione del numero. Ma la scrittura del numero, non essendo una semplice attività di traduzione della parola-numero, implica la necessità di accedere alla coscienza delle regole generali di scrittura dei numeri. L'ambito delle monete, e in particolare il contenuto semantico più forte, e cioè il significato valore, consente di evitare l'apprendimento meccanico o astratto di tali "regole".

Da un lato, con la pratica di uso delle monete, il bambino acquista familiarità con i numeri che ne esprimono il valore, costruendone poco alla volta la padronanza. Ma tale processo non si conclude genericamente con il riconoscimento che la moneta da 500 "vale 5 da 100". Si può dire che inizi a questo punto: esso richiede che il bambino riconosca anche nel segno tale significato. E, d'altra parte, questo riconoscimento ha una funzione sinergica nel rafforzamento della padronanza del significato valore (e più in generale nella struttura del sistema dei numeri).

Lavorando con le monete il bambino osserva (e pratica) il fatto che, dovendo pagare 1.400 lire, egli può comporre in molti modi tale prezzo. Può, ad esempio, pensarlo composto da una banconota da mille e quattro monete da cento. Esse (monete e banconota) concorrono alla formazione del prezzo, è difficile per il bambino distinguerle e separarle: esse rappresentano il "mucchio" di soldi necessari per il pagamento. Questo fatto ha un significato importante, poiché, rielaborato, rappresenta l'inizio di un processo di differenziazione, necessario al conseguimento di livelli superiori di coscienza. Il bambino giungerà a distinguere (attraverso le sollecitazioni che gli provengono dal contesto del campo di esperienza e dalle attività svolte in classe) le singole monete come concorrenti, ciascuna per la sua parte di valore, alla formazione del prezzo.

E' nel corso di questa fase che l'attività di composizione-scomposizione, il cui motore è l'acquisizione della componente "valore", risulta essere produttiva e generatrice di nuove conoscenze: il pensiero del bambino matura gradualmente il riconoscimento e la padronanza delle cifre significative che compongono il numero.

5.1 ... attraverso l'utilizzo dell'abaco delle monete ...

A questo punto del lavoro scolastico (marzo della classe prima), l'abaco delle monete, usato per sistematizzare e rendere evidente la scrittura del numero, non ha il significato di strumento sul quale imparare: esso assume una funzione assai più complessa. Sull'abaco è possibile riflettere sulle relazioni tra il numero impresso sulle monete e il significato di tale numero: ciò rende

evidente ciò che si sapeva già, ma lo rende ad un livello di consapevolezza superiore.

E' interessante (e talvolta stupefacente) notare l'atteggiamento dei bambini quando riconoscono che quattro monete da cento sull'abaco portano alla scrittura di "400". Tale atteggiamento denota che i bambini non imparano nulla di nuovo in quanto a contenuto: essi iniziano ad intravedere la possibilità di guardare da un altro punto di vista, posto su un piano diverso, il medesimo "oggetto". Questo passaggio é pressoché autonomo e ciò costituisce un elemento di notevole importanza, perché indica che il bambino è diventato cosciente della scrittura del segno.

L'abaco assume due funzioni distinte: nei momenti di lavoro con i prezzi e le monete, esso è l'ambiente di rappresentazione esterna che supporta i processi interni di pensiero. Ad esempio, il bambino, dovendo capire come si scrive il numero "1.050", utilizza l'abaco per rappresentarlo. Nello stesso tempo, l'abaco consente al bambino il distacco dai numeri delle monete. L'abaco cioè ripulisce il numero dal suo significato contestualizzato, proprio nel momento in cui tale significato viene rappresentato esplicitamente. La rappresentazione esterna favorisce la transizione al numero in quanto tale, proprio perché il bambino non ha più bisogno di contestualizzare il significato delle cifre.

Per quanto si è detto, è importante che l'insegnante, consapevole di questo duplice aspetto dell'abaco, lo introduca nel lavoro in classe solo quando gli alunni hanno maturato una sufficiente padronanza del significato valore, in modo da evitare il rischio che l'abaco diventi uno strumento "depositario del sapere", a cui il bambino si affida per ottenere un risultato.

(cfr. documentazione "Monete e prezzi", marzo-aprile)

L'abaco consente di rendere chiaro il rapporto fra la denominazione linguistica e la scrittura del numero. Se alle 4 monete da cento si aggiunge sull'abaco anche la banconota da mille, essa deve essere inserita in una colonna diversa da quella delle "cento", ma tale colonna è in relazione con quella delle "cento". L'ordine del valore (fra le monete da 100 e le banconote da 1.000 non esistono denominazioni intermedie) interviene allora nella costruzione dell'ordine della posizione. In più, il legame che nel momento dell'azione il bambino individua fra le "100" e le "1.000" (10 monete da 100 fanno 1.000, due monete da 500 fanno 1.000, ...) trova nell'abaco la conferma e la giustificazione.

L'abaco contrae significati di valore che prima potevano essere percepiti come separati; nello stesso tempo, consolida le relazioni fra i diversi tipi di valore delle monete, già individuati sul piano dell'azione, ponendoli agli occhi del bambino su un piano di coscienza superiore. Questo processo, di natura dinamica, interviene nel momento in cui il bambino deve scrivere il numero che sta contando: di fronte a 1.400, per poterlo scrivere, egli deve chiedersi quanto vale il "4", attuando il passaggio all'interpretazione del segno. Nello stesso modo, dovendo scrivere "millecinquanta", il bambino può appoggiarsi all'abaco per comprendere le ragioni della necessità di inserire lo "zero" intermedio, poiché nella memoria dei significati rintraccia l'assenza di monete da cento.

6. L'ATTIVITA' DI COMPOSIZIONE - SCOMPOSIZIONE ADDITIVA CON LE MONETE

L'attività di composizione-scomposizione (d'ora in poi c.-sc.) si caratterizza come una attività operativa, accompagnata sovente dall'esplicitazione verbale delle scelte, tendente a formare, attraverso la selezione di monete sulla base del vincolo costituito dal loro valore, il numero che esprime un determinato prezzo. Nell'attività di c.-sc. si può scorgere lo sviluppo di un modello operativo, complesso ed articolato, che procede interattivamente con la padronanza del "significato valore", del calcolo mentale, degli scripts relativi al contesto del campo di esperienza.

Nel nostro progetto la c.-sc. viene richiesta agli alunni, fin dai mesi iniziali della classe prima, dapprima quando sono posti in una situazione di acquisto reale e successivamente nel corso della risoluzione di problemi. E' un'attività rigorosamente individuale, svolta generalmente in presenza dell'insegnante.

Nel formare il prezzo, il bambino deve rovesciare la tradizionale strutturazione della situazione problematica: egli conosce, come entità numerica, l'obiettivo a cui deve pervenire e questo comporta lo spostamento dell'attenzione su come può raggiungerlo con le monete a sua disposizione. L'attenzione è dunque rivolta al processo di pensiero necessario alla composizione del prezzo, di cui è elemento importante l'atteggiamento che il bambino mostra nell'operare con il materiale, in dialettica con la crescita della padronanza della componente matematica delle monete. Questo determina, in modo naturale, la nascita di un linguaggio comune, fra i bambini e fra l'insegnante e i bambini, relativo alle strategie di c.-sc., che favorisce la comunicazione in classe e la sensibilizzazione verso modi di ragionare effettuati da altri.

Se il bambino disponesse di una quantità illimitata di monete da cento, la formazione del prezzo non avrebbe una complessità diversa da altre situazioni. Lo stimolo fornito dal materiale-moneta (avente valori diversi), dai vincoli della realtà ("*ho queste monete...*") e della situazione ("*devo pagare questo prezzo...*") determinano il contesto in cui i processi inerenti la c.-sc. si distinguono dalla conta cardinale. Nel quadro dello scambio denaro-merce attuato nel corso del lavoro in classe, il bambino può utilizzare liberamente le monete a disposizione, come succede nella situazione extrascolastica: nell'uno e nell'altro caso egli è, cioè, forzato a ricercare strategie per aggirare, rimontare, risolvere i problemi che gli si presentano per raggiungere l'obiettivo di acquisto.

Ma la situazione didattica di lavoro con le monete si differenzia dalla situazione di acquisto nella vita quotidiana perché al bambino è richiesta la esplicitazione del processo di pensiero e perché il contesto è inserito in una situazione di apprendimento (e il bambino non può sottrarsi, ad esempio, al confronto con la situazione problematica). (cfr. documentazione "*Monete e prezzi*", 7 marzo mercato in classe)

La richiesta di esplicitazione comporta l'accompagnamento e la rielaborazione dell'azione mediante il linguaggio verbale ed é mirata a favorire la coscienza del processo di pensiero compiuto. L'uso del linguaggio, fissando modalità di interazione con la situazione, ma permettendo anche di intravedere nuove possibilità, prelude al progressivo distanziamento dall'esperienza e pone in forme nuove, nel corso dello sviluppo, la relazione fra il pensiero e l'azione.

L'attività di c.-sc. necessaria per la formazione di un prezzo, se esaminata su un periodo di tempo lungo, diventa un ambiente mentale in cui il bambino è sollecitato a forzare processi di pensiero

fecondi per lo sviluppo del problem solving.

In particolare, la nostra ipotesi è che questo ambiente favorisca lo sviluppo della capacità di anticipazione del pensiero rispetto all'azione, connessa con la formulazione di ipotesi euristiche (cfr. punto 4.4.4.); della capacità di controllo del processo; della coscienza della legittimità del cambiamento di strategia. L'analisi dei processi di pensiero relativi alle abilità citate riveste una particolare importanza dal punto di vista dello sviluppo della progettualità, all'interno di un contesto che consente all'insegnante, fin dall'inizio della scuola elementare, di curare l'approccio a situazioni complesse.

Esaminiamo più dettagliatamente questi aspetti utilizzando alcuni protocolli di osservazione del comportamento dei bambini nel corso del pagamento reale del prezzo di 700 lire (metà gennaio della classe prima).

6.1 Sviluppo dei processi mentali di problem solving nell'attività di composizione-scomposizione.

Aurelio apre il borsellino, cerca fra le monete.

"Una moneta da cento... cento..." (la prende e la mette sul tavolo)

"Una moneta da duecento..." (idem)

"Una moneta da cinquanta lire... poi..." (idem)

Conta le monete disposte sul tavolo, assegnando il valore di cento lire alla moneta da 50. Glielo faccio notare e gli consiglio di toglierla. Conta che ha già trecento lire. Tira fuori tutte le monete dal borsellino.

"Una moneta da cento..." (la mette accanto alle altre)

"Una moneta da duecento..." (idem)

Conta le monete in quest'ordine: cento, cento, duecento, duecento dicendo correttamente che sono seicento lire.

"Metto un'altra moneta da cento..." (la mette)

Conta di nuovo

come mette le monete

come conta le monete

100 200 100 200 100

100 100 100 200 200

Conta cioè prima le cento e poi le duecento e poi dice: "Settecento".

Nell'attività di c.-sc. si delinea, inizialmente, una organizzazione cognitiva del materiale, all'interno della quale il bambino precisa via via gli elementi di distinzione dei diversi tipi di monete. Il processo di distinzione ha solo marginalmente (e soltanto in una breve fase iniziale) a che fare con il riconoscimento e la denominazione delle monete: esso non costituisce una fase statica e porta alla scoperta di modi diversi di aggregare il materiale a disposizione, in vista del raggiungimento di uno scopo, liberando la possibilità di **considerare le monete secondo il criterio del valore**. E' proprio questo criterio che emerge gradualmente, passando attraverso la

scoperta della inadeguatezza di concezioni "ingenua".

Ciò rappresenta un atteggiamento che pone le basi per successive elaborazioni: il bambino si abitua a scegliere le monete, ma, seguendo il corso del suo pensiero, anche a riorganizzarle nel momento del conteggio. L'associazione dell'azione concreta e del pensiero in seguito costituirà il riferimento per la gestione mentale della composizione aritmetica di un numero.

Il protocollo di Steven mette invece in evidenza lo sviluppo del processo di "**avvicinamento progressivo**" al prezzo:

Steven apre il borsellino, fruga dentro, ma senza tirar fuori le monete.

"Prima prendo una moneta da cento" (la mette sul tavolo)

"Un'altra da cento" (idem)

"Un'altra da cento" (idem)

"Un'altra da cento" (non la trova, prende un po' di monete in mano e le guarda attentamente)

"Una da duecento" (prende una moneta da 200 fra quelle che ha in mano e la mette sul tavolo)

Prende altre monete in mano.

"Una da cento" (la posa accanto alle altre)

"...e un'altra da cento" (idem; si arresta, come chi ha finito)

"*Sono giuste ?*"

"Sì"

"*Come hai fatto a contare ?*"

"Le ho contate nella mia mente. Quando ho messo tutte queste monete poi nella mente le ho contate"

"*Mentre ne mettevi una , contavi ?*"

"Sì"

Le monete selezionate vengono tenute sotto controllo in termini di quantità di valore già formato e il bambino procede alla selezione delle successive monete intensificando i processi mentali di andata e di ritorno dal prezzo al valore già composto. Il taglio delle diverse monete influenza in misura inferiore il bambino, che tiene a mente, presumibilmente, l'incremento che esse portano alla quantità di valore già selezionato.

A differenza del protocollo precedente, sembra quindi che il livello dell'azione sia accompagnato dalla conta progressiva delle monete selezionate. Ciò lascia intuire un maggior controllo del pensiero sull'azione, che probabilmente determina la consapevolezza delle ultime monete da aggiungere ("*...e un'altra moneta da cento*").

Nel protocollo di Federico si intravede la generazione di una ipotesi euristica che permette il **cambiamento della strategia** prefigurata

Federico cerca fra le monete del suo borsellino. Non le tira fuori tutte.

200 "la moneta da duecento..." (frase detta fra sè e sè)
 100 100 "... due da cento..." (fra sè e sè)
 Ne prende due da duecento, le guarda, ne posa una.
 200 "... una da duecento..." (fra sè e sè, guardandomi)

Le dispone così:

200	200 100 100
seconda moneta da 200	monete precedenti sistemate partendo da destra

"Mi manca una moneta da cento..."
 "Non c'è un altro modo per pagare?"
 "Sì..." (guarda nel borsellino e poi tira fuori tutte le monete)
 "Tolgo questa (da 100), metto questa (da 200)"
 "Io ho guardato molto attentamente e ho capito tutto ciò che hai fatto, ma non so che cosa hai pensato... me lo dici?"
 "Ho pensato che se toglievo una moneta da 100 mi restava 500... poi ho preso una moneta da 200 perchè se no mi rimaneva 500"

Le operazioni mentali che il bambino compie risultano importanti ai fini della padronanza di abilità aritmetiche di composizione di un numero e il processo che le genera è assai articolato. Federico, per produrre l'ipotesi di sostituzione della moneta da cento lire con quella da duecento, deve ragionare sul valore raggiunto in quanto "numero", che condensa il valore delle monete selezionate, e attuare dinamiche di andata-ritorno con il prezzo, che suggeriscono quanto manca. Il valore mancante potrebbe essere colmato con il valore della moneta da cento. Ma in tal modo egli può prefigurare (sulla base della coscienza del valore di "duecento") che, se toglie una moneta da cento sostituendola con una da duecento, quest'ultima contiene la moneta tolta e il valore mancante.

Il cambiamento della strategia è attinente allo sviluppo della capacità di controllo nell'attività di problem solving: quando non può seguire la strada che auspica, il bambino per sostituire una moneta con un'altra di valore diverso, ha bisogno di anticipare le conseguenze della propria scelta e di verificare mentalmente se ciò soddisfa il raggiungimento dell'obiettivo.

Protocollo di Mara:

Apri il borsellino, tira fuori 500 e poi 100. Conta bisbigliando che fa 600 e poi tira fuori un'altra moneta da 100, senza ricontare, e dice: "Ecco".
 "Perché hai tirato fuori prima le 500 lire?"
 "Perché comincio da quella che vale di più. Certe volte si

comincia da quella da 50 e certe volte da quella da 500.
Dipende dal prezzo"

Protocollo di Mariella:

Tira fuori tutte le monete e, dopo averle guardate brevemente, mi dà:

500 200

Fingo sorpresa per la rapidità del procedimento.

"Ho contato che 500 e 200 fanno 700 (a mente). Se prendevo altre monete pagavo di più"

Questi due protocolli mostrano come il bambino giunga ad elaborare, sotto la spinta della padronanza del calcolo mentale e dell'interiorizzazione del valore delle monete, la **contrazione del processo** di composizione.

La scelta delle monete non appare più orientata dai criteri iniziali di casualità o di accorpamento di monete di ugual valore: si assiste allo sviluppo di strategie operative tendenti al rapido completamento del prezzo. Il criterio orientatore è dato dalla consapevolezza che la scelta delle monete può essere guidata dalla valutazione del loro valore, in rapporto al prezzo da formare e che si possono utilizzare molte strategie. Il pensiero del bambino si muove in un ambito numerico nel quale le operazioni di anticipazione e di controllo vengono gestite sulla base della valutazione dell'ordine di grandezza dei numeri.

D'altra parte, la padronanza del "significato valore" induce la capacità di anticipare la strategia e di ipotizzare alternative possibili. Questa capacità esprime un aspetto assai fecondo per la padronanza di successive operazioni mentali con i numeri. Il bambino è ormai nella fase in cui può gestire mentalmente il rapporto con i numeri e prefigurare il risultato delle proprie azioni distanziandosi dal materiale concreto, che diventa l'oggetto materiale che traduce, nella dinamica sociale degli scambi economici, il processo di pensiero attuato.

Il protocollo di Mariella, in particolare, mostra come il processo sia ormai interno al pensiero, il quale si esprime nell'azione.

E' opportuno notare come i processi mentali descritti analiticamente in precedenza, in realtà non costituiscano fasi successive, ma agiscano in modo integrato. Compiendo movimenti di andata-ritorno con la mente, il bambino intravede anche la possibilità di cambiare la strategia, maturando via via un rapporto sempre più profondo con il numero che esprime il valore delle monete. In tal modo giunge ad ipotizzare più alternative per la formazione del prezzo, prima operativamente, poi, via via che si accresce la coscienza di tali operazioni, in termini di gestione mentale della situazione. Nel corso di questo processo il bambino progressivamente interiorizza, trasferendo su di un piano intellettuale, ciò che ha svolto sul piano operativo, giungendo alla contrazione del processo.

Se la pista di analisi fin qui seguita si riferisce alla maturazione nell'ambito della cognizione individuale, non si deve dimenticare che essa si sviluppa anche attraverso l'osservazione di come contano i compagni, la discussione e la socializzazione delle scelte attuate, l'interazione con l'insegnante, la sinergia con esperienze della vita quotidiana.

L'ipotesi soggiacente alla scelta di far lavorare gli alunni in situazioni di c.-sc. con le monete è che essi sviluppino la padronanza di abilità necessarie a gestire consapevolmente il problem

solving. La c.-sc. pone le basi per una progressiva decontestualizzazione verso l'aritmetica, inducendo la costruzione del campo di esperienza dei numeri. La consapevolezza del proprio agire mentale (connessa con il distanziamento dal materiale concreto) e la stabilizzazione delle modalità di lavoro con i numeri costituiscono i riferimenti per i meccanismi di contrazione, dove la gestione temporale della situazione acquista forme più mature, in un quadro di sviluppo della progettualità.

6.2 Approccio alle proprietà delle operazioni aritmetiche.

L'attività di c.-sc. è un serbatoio ricco di esperienze di utilizzo "in atto" delle operazioni di addizione e di sottrazione: "quanto devo aggiungere?", "quanto manca?," "se tolgo questa moneta e metto quest'altra...", "500 e 200 fanno 700, come $100+100+100+100+100+100+100...$ ", "quanti soldi mi restano nel borsellino?" rappresentano domande che il bambino è indotto a porsi nel corso dell'attività. In esse il riferimento è ancora spesso costituito dal "pensare" le monete e le operazioni sono fortemente collegate con un livello operativo diretto.

Lavorando con i prezzi, il bambino sviluppa nuove competenze anche sul terreno della padronanza dei significati delle operazioni, poiché esse ora riguardano la manipolazione dei numeri. Nel corso di questa fase si possono individuare fenomeni di filiazione dall'attività di c.-sc.: essa fornisce al bambino un riferimento mentale che egli trasferisce all'atteggiamento con cui affronta il lavoro con i numeri.

La flessibilità implicita nella manipolazione delle monete consente l'approccio al teorema in atto¹ "della commutatività dell'addizione" e rende inoltre percepibile l'opportunità di variare l'ordine degli addendi per agevolare il calcolo.

La successiva consapevolezza che $200 + 500 = 500 + 200$ è il riconoscimento dell'invarianza del numero che risulta dalla somma dei valori di due monete, qualunque sia la loro disposizione (proprietà commutativa dell'addizione).

La gestione di questo processo, che comporta la coscienza della convenienza di cominciare dalla moneta che vale di più, rivela la natura dell'interiorizzazione avvenuta sul piano della trattazione della componente matematica delle monete, che ha i suoi fondamenti, e la sua corrispondenza, sul piano della pratica sociale riguardante l'uso del denaro.

La proprietà associativa dell'addizione è filata dal riconoscimento delle affinità di valore nelle cifre significative dei numeri. Quando il bambino deve contare le monete con grandezze di valori differenti procede associando secondo ordini di grandezze (*cf. documentazione "Monete e prezzi", 15 novembre, allenamenti*).

Anche in questo caso si può affermare che già nell'attività di composizione - scomposizione appaiono le premesse che condurranno al "teorema in atto". Nel momento in cui il riferimento è costituito dai numeri che esprimono i prezzi, ciò renderà possibile la flessibilità del loro trattamento.

Nella fase che precede la costruzione ragionata della tecnica di calcolo, il bambino utilizza come "teorema in atto" la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma nel calcolo. Essa è filata dalla composizione-scomposizione, ma richiede l'accettazione della legittimità della congruenza, nella semantica del "ripetere", della composizione additiva eseguita in due modi

¹ Per "teorema in atto" Vergnaud intende la proprietà matematica (in forma implicita e in genere, inizialmente, non consapevole) in una attività del bambino come strumento per risolvere un problema.

diversi (cioè "distribuendo" in due modi diversi i prezzi da ripetere).

6.3 L'approccio agli algoritmi del calcolo scritto.

Le strategie attuate dagli alunni nel calcolo delle operazioni, precedentemente esaminate, sono rese possibili non solo dalle abilità di trattazione dei numeri che i bambini hanno maturato nel corso dell'attività di c.-sc., ma anche dal fatto che essi non dispongono ancora delle tecniche di calcolo scritto standard. La esplicitazione delle modalità di calcolo segue prevalentemente la scia del calcolo mentale e risulta feconda per quanto riguarda l'approccio all'algoritmo scritto.

L'incolonnamento dei numeri delle addizioni e delle sottrazioni (che avverrà solo dalla classe seconda) come abilità inizialmente non meccanica o basata su regole formali, ha il suo fondamento, nel nostro progetto, nella comprensione e nell'utilizzo del modello mentale di numero costruito attraverso l'uso delle monete. La significatività delle cifre dei numeri (che ha come riferimento il "valore") diviene il criterio della relazione di appartenenza ad un certo ordine di grandezza. In questo senso, il bambino, in classe seconda, nel sommare in colonna 3.560 e 870 individuerà le cifre "5" e "8" come appartenenti all'ordine delle "cento", in quanto potrà ricondurle all'esperienza del significato di "500" e di "800" e, analogamente, potrà riconoscere che le cifre "6" e "7" appartengono all'ordine delle "dieci" perché potrà pensarle come espressione di "60" e di "70". Al termine del primo ciclo, una percentuale molto alta di bambini non ha difficoltà nell'incolonnamento corretto dei numeri e dispone di modalità di controllo dell'errore basate sul controllo (di significato) dell'ordine di grandezza delle cifre.

L'attività di c.-sc. determina un ambiente in cui i processi legati al calcolo mentale possono svilupparsi e maturare senza l'"ostacolo" del calcolo scritto. Il passaggio agli algoritmi del calcolo scritto si configura come la valorizzazione e la stabilizzazione (in termini di presa di distanza) di procedure prodotte e di abilità acquisite dal bambino attraverso il lavoro con i numeri nel corso della risoluzione di problemi.

7. IL RESTO MONETARIO

Il "resto monetario" è un significato isolato nel contesto dei significati della sottrazione: appartiene esclusivamente alle situazioni del campo di esperienza delle monete e degli acquisti. D'altra parte, i problemi di resto monetario hanno un consistente spazio, nel quadro del problem solving del nostro progetto, dalla fine della prima all'inizio della terza elementare. Questa scelta richiede di essere spiegata. Le situazioni che comportano un resto monetario non risultano importanti tanto come lavoro su di un significato particolare della sottrazione, quanto come propedeuticità ad abilità necessarie per lo sviluppo della capacità di affrontare problemi. Esse, in particolare, si configurano come un significativo ambiente di sviluppo delle dinamiche temporali che intervengono nel problem solving complesso autonomo.

Per padroneggiare una situazione problematica di resto monetario è necessario:

- *valutare il rapporto denaro/prezzo (secondo la relazione $>$, se non è possibile o conveniente la relazione $=$)*
- *effettuare il pagamento con il denaro selezionato*
- *attendere il ritorno di denaro e oggetto*

Occorre coordinare una relazione di andata e ritorno che si dilata nel tempo, che coinvolge un altro soggetto, che comporta una "scomposizione" dell'importo versato.

Una situazione di resto richiede pertanto una capacità non banale di coordinazione e di gestione

della dinamica temporale. Molte difficoltà si situano proprio a questo livello, perché è necessario ricordare temporalmente le azioni (e il loro significato) effettuate da soggetti diversi. Non è raro che i bambini (e ciò succede anche fra gli adulti), in situazioni di acquisto reale, prendano il resto "dimenticando" l'oggetto!

Per giungere a gestire questo tipo di situazione complessa ed articolata, è opportuno che il bambino inizialmente (classe prima) assista (dall'esterno, ma situato nell'attività di classe) alla dinamica interpersonale che avviene in una situazione di resto. In questo modo il bambino ha l'opportunità di prendere coscienza delle fasi che si succedono nello svolgimento della situazione e di iniziare a situarle temporalmente, riconoscendo loro un senso.

I due protocolli seguenti, relativi al mese di maggio della classe prima, possono chiarire questo punto (si noti l'importanza della verbalizzazione nella presa di coscienza della complessità della situazione da parte del bambino). I protocolli attestano due livelli diversi di padronanza della situazione di resto:

Verbalizzazione scritta di Vera:

"La signora del negozio al maestro dice: i sottovasi costano 800 lire. Il maestro dà 1.000 lire alla signora del negozio, la signora del negozio al maestro gli dà lo scontrino poi la signora del negozio al maestro gli dà 2 monete da 50 poi altre 2 monete da 50. La signora del negozio dà in tutto al maestro 200 lire"

Verbalizzazione scritta di Andrea:

"Il maestro alla signora gli ha dato una banconota da mille lire ma i sottovasi costavano uno 400 e l'altro 400. Siccome il maestro alla signora gli ha dato 1.000 la signora gli ha restituito 4 monete da 50 lire"

La necessità di riequilibrare la situazione fra prezzo e denaro consegnato richiede la consapevolezza che
valore "consegnato" = valore dell'oggetto + valore del resto.

Ciò corrisponde alla **strategia** detta di "**completamento**", che, generalmente, viene assunta dai bambini fin dai primi problemi.

Questa strategia, rispondendo al bisogno di rimontare il disequilibrio, permette al bambino di utilizzare ancora, nel calcolo, l'ambito delle monete ("*Conto quanto manca per raggiungere...*", "*Vado dal prezzo ai soldi che ha dato aggiungendo le monete che mancano...*", "*Il resto è 200 lire, perchè ho dato la moneta da 200 lire in più...*"). Nel conteggio per completamento, inizialmente, per molti bambini il riferimento alle monete da restituire è indotto dall'aderenza alla concretezza della situazione, dove il calcolo del resto è ancora difficilmente separabile dalle monete necessarie a comporlo perché esse vanno rese all'acquirente.

(cfr. documentazione "Monete e prezzi", marzo-quanto manca, maggio-problemi di resto monetario, giugno-strategia di completamento)

La possibilità per il bambino di sperimentare la strategia di completamento in diversi ambiti significativi risulta essere feconda per più motivi. In primo luogo, perché è un algoritmo che consente al bambino di non perdere di vista il significato dei dati del problema, poiché permette di mantenere il contatto con la temporalità della situazione. In

secondo luogo, perché permette di dare spessore all'entità numerica da contare: è il resto che viene conteggiato, esso non risulta "magicamente" da un conto.

La strategia per completamento viene realizzata anche in altri ambiti: ad esempio nella conta della differenza di temperature:

"La temperatura esterna era di 7°, invece la temperatura interna era di 20°. Io ho contato tutte le lineette fino a 20° e in tutto fa 13° di differenza".

NOTA: Solo nel secondo quadrimestre della classe seconda l'insegnante, nel nostro progetto, induce il passaggio all'algoritmo della sottrazione come procedura unificante per un gran numero di situazioni diverse, gestendo la dialettica, assai delicata, fra il problem solving individuale e le attività di confronto, che prevede momenti di lavoro individuale e momenti di lavoro collettivo.